

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

**SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELÁSTICOS CON
ELEMENTOS FINITOS MIXTOS**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

P R E S E N T A:

SERGIO FELIPE LÓPEZ GUEVARA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. GELACIO JUÁREZ LUNA

México D.F., AZCAPOTZALCO

JULIO DE 2014

Agradecimientos

Deseo expresar mis sinceros agradecimientos a todos quienes me apoyaron en esta importante etapa de vida.

Principalmente a mis padres por el apoyo que me han dado a lo largo de toda la vida y sobre todo el cariño y cuidado que siempre me han brindado, a mis hermanos y familia que siempre han estado conmigo y que sin ellos esto no tendría sentido.

Un enorme agradecimiento al Dr. Gelacio Juárez Luna, mi director de tesis, sus consejos y apoyo para el desarrollo de la misma. El tiempo de trabajo conjunto han hecho que él sea mi maestro y amigo.

A la licenciada Daniela Nolasco Pérez por todo su apoyo incondicional.

A los ingenieros Oscar Trejo y Alberto Espinosa por compartir conmigo su amistad y conocimientos.

A mis amigos y compañeros del posgrado. Siempre los tendré en mis recuerdos y mi corazón.

A la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.

Por último, agradezco sinceramente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado en este proceso, y al área de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana por ofrecer una educación de calidad que me ha permitido desarrollarme como persona y como profesional.

Índice

1	Introducción	1
1.1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.2	ANTECEDENTES	2
1.3	OBJETIVOS.....	4
1.4	ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	4
2	Formulación de elementos finitos	6
2.1	PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA	8
2.2	FUNCIONALES DE ENERGÍA	9
2.2.1	<i>Funcional u</i>	9
2.2.2	<i>Funcional $u-\epsilon$</i>	10
2.2.3	<i>Funcional $u-\sigma$</i>	11
2.2.4	<i>Funcional $u-\sigma-\epsilon$</i>	11
2.3	APROXIMACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS	11
2.3.1	<i>Aproximación u</i>	11
2.3.2	<i>Aproximación $u-\epsilon$</i>	12
2.3.3	<i>Aproximación $u-\sigma$</i>	13
2.3.4	<i>Aproximación $u-\sigma-\epsilon$</i>	14
2.4	LINEALIZACIÓN	14
2.4.1	<i>Aproximación u</i>	14
2.4.2	<i>Aproximación $u-\epsilon$</i>	14
2.4.3	<i>Aproximación $u-\sigma$</i>	15
2.4.4	<i>Aproximación $u-\sigma-\epsilon$</i>	16
3	Implementación numérica	18
3.1	ORGANIZACIÓN DE PROGRAMACIÓN	18
3.1.1	<i>Organización del programa</i>	19
3.2	IMPLEMENTACIÓN.....	21
3.2.1	<i>Formulación u</i>	21
3.2.2	<i>Formulación $u-\epsilon$</i>	23
3.2.3	<i>Formulación $u-\sigma$</i>	24
3.2.4	<i>Formulación $u-\sigma-\epsilon$</i>	25
4	Ejemplos de Aplicación	26
4.1	VALIDACIÓN.....	26
4.2	VIGA EN CANTILÉVER	26
4.3	PLACA CON HUECO	34
4.4	CUÑA DE CONCRETO	37
4.5	PRUEBA DE LA PARCELA	39
4.6	DISCO.....	41
4.7	PLACA CON PERFORACIÓN Y CORTE	44
4.8	MEMBRANA DE COOK.....	46
4.9	ESPÉCIMEN DE CONCRETO CON RANURAS AL CENTRO	55

4.10	ESPÉCIMEN SOMETIDO A CARGAS HORIZONTALES EN LA MISMA DIRECCIÓN	61
4.11	ESPÉCIMEN SOMETIDO A CARGAS POR CORTANTE	62
4.12	ESPÉCIMEN SUJETO A MOMENTO	64
5	Conclusiones y Recomendaciones	65
5.1	CONCLUSIONES.....	65
5.2	RECOMENDACIONES	66
5.3	TRABAJO FUTURO.....	66
	Referencias	67
6	Programa de desplazamientos	70
7	Programa de desplazamientos –deformaciones.....	75
8	Programa desplazamientos - Esfuerzos.....	79
9	Programa desplazamientos – Deformaciones - Esfuerzos.....	83

Lista de figuras

2.1. Modelo constitutivo elástico lineal.....	8
2.2. Continuo con dominio Ω	9
2.3. Modelo constitutivo elástico esfuerzo-deformación.....	15
2.4. Modelo constitutivo elástico deformación-esfuerzo.....	16
3.1. Esquema simplificado del programa de elementos finitos.	18
3.2. Ejemplo de mallado con numeración de elementos y nodos.....	21
3.3. Esquema del programa de elementos finitos formulación estándar	22
3.4. Esquema del programa de elementos finitos formulación $u-\epsilon$	23
3.5. Esquema del programa de elementos finitos formulación $u-\sigma$	24
3.6. Esquema del programa de elementos finitos formulación $u-\sigma-\epsilon$	25
4.1. Viga en cantiléver	26
4.2. Mallado de viga con: a) 2, b)8, c)32, d)128 y e)512 elementos	27
4.3. Viga deformada Matlab	28
4.4. Desplazamientos	28
4.5. Energía.....	29
4.6. Viga deformada formulación a) u , b) $u-\epsilon$, c) $u-\sigma$ y d) $u-\epsilon-\sigma$	29
4.7. Esfuerzos σ_x de viga con 2 elementos formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	30
4.8. Esfuerzos σ_x de viga con 8 elementos formulación a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	30
4.9. Esfuerzos σ_x de viga con 32 elementos formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	31
4.10. Esfuerzos σ_x de viga con 128 elementos formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	31
4.11. Esfuerzos σ_x de viga con 512 elementos formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	32
4.12. Deformaciones ϵ_x de viga con 2 elementos formulación: a) u , b) $u-\epsilon$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	32
4.13. Deformaciones ϵ_x de viga con 8 elementos formulación: a) u , b) $u-\epsilon$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	33
4.14. Deformaciones ϵ_x de viga con 32 elementos formulación: a) u , b) $u-\epsilon$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	33
4.15. Deformaciones ϵ_x de viga con 128 elementos formulación: a) u , b) $u-\epsilon$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	33
4.16. Deformaciones ϵ_x de viga con 512 elementos formulación: a) u , b) $u-s$ y c) $u-e-s$	34
4.17. Placa con hueco	34
4.18. Desplazamiento vertical de placa con hueco formulación: a) ANSYS, b) u , c) $u-\epsilon$ y d) $u-\sigma$ y e) $u-\epsilon-\sigma$	35
4.19. Esfuerzos σ_x de placa con hueco formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	36
4.20. Deformaciones ϵ_y de placa con hueco formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	36
4.21. Cuña de concreto	37
4.22. Desplazamientos verticales cuña de concreto	38
4.23. Esfuerzos σ_x de cuña de concreto formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	38
4.24. Deformaciones de cuña de concreto formulación: a) u , b) $u-s$ y c) $u-e-s$	39
4.25. Prueba de la parcela.....	39
4.26. Desplazamiento horizontal de la parcela formulación: a) u , b) $u-\epsilon$, c) $u-\sigma$ y d) $u-\epsilon-\sigma$ 40	
4.27. Esfuerzos σ_x de la prueba de la parcela formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	41
4.28. Deformaciones ϵ_x de la prueba del parche formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\epsilon-\sigma$	41

4.29. Disco.....	42
4.30. Desplazamientos de disco formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	42
4.31. Deformaciones ε_y de disco formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	43
4.32. Esfuerzos de disco formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	43
4.33. Placa con perforación y corte	44
4.34. Desplazamientos de placa formulación: a) u, b) $u-\sigma$, c) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	45
4.35. Deformaciones ε_y de placa formulación: a) u, b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	45
4.36. Esfuerzos σ_y de placa formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	46
4.37. Membrana de Cook	46
4.38. Mallado de membrana con: a) 2, b) 8, c) 128, d) 512 y e) 2048 elementos.	47
4.39. Desplazamientos máximos de todas las mallas	48
4.40. Desplazamientos verticales con 2 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$...	48
4.41. Desplazamientos verticales con 8 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$..	49
4.42. Desplazamientos verticales con 128 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	49
4.43. Desplazamientos verticales con 512 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	50
4.44. Desplazamientos verticales con 2048 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	50
4.45. Esfuerzos σ_y con 2 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	51
4.46. Esfuerzos σ_y con 8 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	51
4.47. Esfuerzos σ_y con 128 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	52
4.48. Esfuerzos σ_y con 512 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	52
4.49. Esfuerzos σ_y con 2048 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	53
4.50. Deformaciones ε_y con 2 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	53
4.51. Deformaciones ε_y con 8 elementos formulación: a) u, b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	54
4.52. Deformaciones ε_y con 128 elementos formulación: a) u, b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	54
4.53. Deformaciones ε_y con 512 elementos formulación: a) u, b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	55
4.54. Deformaciones ε_y con 2048 elementos formulación: a) u, b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	55
4.55. Espécimen de concreto con ranuras.....	56
4.56. Mallado del elemento con: a) 416 y b) 1664 elementos.....	56
4.57. Desplazamientos de elemento formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y $u-\varepsilon$, c) $u-\varepsilon-\sigma$	57
4.58. Esfuerzos σ_x en malla de 416 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	57
4.59. Esfuerzos σ_x en malla de 1664 elementos formulación: a) u, b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	58
4.60. Deformaciones ε_x en malla con 416 elementos formulación: a) u, b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$..	58
4.61. Deformaciones ε_x en malla con 1664 elementos formulación: a) u, b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$	59
4.62. Corte de elemento de concreto	59
4.63. Esfuerzo σ_x en corte A	60
4.64. Esfuerzo σ_x en corte B	60
4.65. Esfuerzo σ_x en corte C	61
4.66. a) Viga en cantiléver, b) Malla propuesta.....	61
4.67. Viga en cantiléver a) desplazamientos, b) deformaciones y c) esfuerzos	62
4.68. a) caso 1 y b) caso 2.....	63

4.69. Malla.....	63
4.70. Viga deformada	63
4.71. Viga en cantiléver.....	64
4.72. Viga deformada	64

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Introducción

Existen varios problemas de ingeniería que pueden representarse por modelos matemáticos, en general las ecuaciones que describen estos modelos son difíciles de resolver analíticamente, por lo cual, la resolución y simulación computacional se hace indispensable. Es por esto que una parte importante de la comunidad científica dedicada al análisis numérico ha desarrollado nuevas herramientas que permiten modelar eficientemente estos problemas matemáticos.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una herramienta que permite obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones en derivadas parciales que rigen el comportamiento de los medios continuos, mediante un sistema de ecuaciones, algebraicas en el caso de problemas estáticos, que relacionan un número finito de variables. Para construir este sistema se requiere de su formulación variacional y su aproximación empleando funciones de interpolación.

El uso del MEF en la solución de problemas de ingeniería es cada vez más amplio y su importancia es cada día mayor. Actualmente se usan diversos programas comerciales en el proceso de diseño y de revisión de elementos; paralelamente se desarrollan códigos para el estudio de problemas más complejos de la ingeniería. El método de elementos finitos busca desarrollar formulaciones eficientes desde el punto de vista computacional y que sean aptas para aplicaciones generales.

Para entender el comportamiento de estructuras, y con ello proponer soluciones que ésta requiere, es importante realizar simulaciones numéricas para verificar que los elementos propuestos pueden soportar las solicitaciones impuestas, estas simulaciones son también necesarias para identificar las posibles fallas que pueda presentarse en una estructura.

En las formulaciones de elementos finitos se considera que los elementos están conectados mediante un número discreto de puntos (llamados nodos), situados en sus contornos. En la formulación estándar de desplazamientos, las incógnitas fundamentales del problema son los desplazamientos nodales, en la que se plantean un número de funciones que aproximan el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito en función de los desplazamientos nodales.

Existen algunas restricciones o propiedades de materiales que inducen a tener un sistema muy rígido, tal que al determinar los desplazamientos, estos son nulos o casi nulos o con resultados que no representan adecuadamente el comportamiento del elemento, a lo que se le conoce como bloqueo. Existen problemas en los que su aproximación con la formulación

de elementos finitos de desplazamientos presenta problemas de bloqueo numérico, por lo que se requiere enriquecer la aproximación para superar este problema.

Al utilizar el método de los elementos finitos se toma un espacio de funciones de prueba, llamadas funciones de interpolación nodal para aproximar la solución correspondiente al medio continuo. Lo que se hace al introducir esta aproximación en la solución, es convertir un problema de infinitos grados de libertad en un problema discretizado, cuya solución tiene un número finito de grados de libertad. El MEF permite encontrar la mejor aproximación a la solución dentro de las funciones de prueba. En ciertas situaciones este espacio resulta ser demasiado pobre e incapaz de aproximar el comportamiento del medio continuo, como consecuencia de ello, la solución del campo de desplazamientos ofrecida por el espacio de funciones de prueba, que en general es subestimada, en casos extremos podría llegar a ser cercana a la nula, por lo que la formulación estándar de desplazamientos presenta el problema de bloqueo.

Cuando el valor del coeficiente de Poisson es cercano a $\nu = 0.5$ los esfuerzos se hacen extremadamente sensibles al valor de ν y los problemas numéricos se acentúan, (Zienkiewicz y Taylor, 1994). En consecuencia, los esfuerzos resultan sobreestimados y las deformaciones resultan subestimadas; en casos severos esto puede dar lugar al bloqueo de los elementos. Debido a estas complicaciones, es importante tener una herramienta para la simulación tomando dos o más variables de interés, que permitan superar el problema de bloqueo y, además, obtener mejores resultados, lo que da lugar a la utilización de las formulaciones mixtas. Estas formulaciones mixtas incluyen en la aproximación del problema la posibilidad de agregar variables adicionales de esfuerzo, σ , y/o deformación, ϵ , o ambas. La aproximación de variables adicionales permite un mejor tratamiento de las restricciones internas producidas por el problema específico.

Para resolver el problema de elasticidad lineal existen aproximaciones mixtas como la de Hellinger-Reissner, en el que se aproximan σ y u , como también a partir de la aproximación de Hu-Washizu, que se caracteriza porque además de las variables σ y u se agrega como incógnita auxiliar las deformaciones ϵ .

La generalización del uso de los equipos de cómputo ha hecho que actualmente el MEF sea una herramienta de cálculo común para el ingeniero. La existencia de programas de preproceso y de postproceso, permiten introducir los datos del problema de manera sencilla, y visualizar adecuadamente los resultados obtenidos.

1.2 Antecedentes

El MEF fue concebido inicialmente en 1956 para resolver problemas estructurales (Turner *et al.*, 1956). En la década de los 60's los avances en la construcción de computadoras y las

aplicaciones del MEF a otros campos de la ingeniería (mecánica de fluidos, mecánica de suelos y rocas, conducción de calor, etc.), supuso un gran desarrollo del método.

Las primeras aplicaciones de elementos finitos mixtos datan desde los sesentas cuando fueron utilizados para modelar flexiones de placa (Herrman y Hellan 1967), independientemente el término mixto se empezó a utilizar en los 60's para describir métodos en que tanto los desplazamientos como los esfuerzos se aproximan como variables primarias, más tarde, Dunham y Pister (1968), usaron el principio variacional Hellinger-Reissner para desarrollar elementos finitos mixtos para problemas de elasticidad plana.

Aproximaciones de elementos finitos de materiales incompresibles sobre dominios acotados han sido estudiados usando métodos mixtos penalizados en varios trabajos (Brezzi y Fortin 1991, Fried 1974 y Zienkiewicz 1977).

Se sabe que la posibilidad de calcular los esfuerzos de manera más aproximada que los desplazamientos constituye la principal ventaja de usar métodos de elementos finitos mixto-dual en elasticidad (Arnold *et al.* 1984). Sin embargo, este enfoque no ha sido totalmente investigado en los casos como el incompresible y el casi incompresible.

Pian (1964) planteó una formulación de dos campos con los esfuerzos supuestos como independientes. Este trabajo condujo a una serie de métodos que se analizaron en Atluri (1975). Fraeijs de Veubeke (1965) estableció el llamado principio de limitación, según el cual bajo ciertas condiciones no se puede esperar precisión adicional de las formulaciones mixtas. Hermann (1965) desarrolló los primeros elementos mixtos derivados de un principio variacional.

Por otro lado, también se obtuvieron buenos resultados de problemas de flexión en placas mediante elementos tridimensionales, aplicando técnicas de integración reducida de la matriz de rigidez. La primera aplicación se presentó en Zienkiewicz (1971), la cual consistió en una reducción uniforme del orden de integración en problemas de placas y cascarones.

Una serie de estudios importantes aportaron las bases para profundizar el conocimiento respecto a estos problemas y formulaciones. Nagtegaal *et al.* (1974), Argyris *et al.* (1974) y Fried (1974) trataron el problema de incompresibilidad y las razones por las cuales la formulación en desplazamientos no funciona. La formulación de Nagtegaal *et al.* (1974) en plasticidad, también conocida como aproximación de dilatación media, se puede citar entre las formulaciones de deformaciones supuestas. Malkus y Hughes (1978) fueron los primeros en demostrar la equivalencia entre las técnicas de integración selectiva en elementos en desplazamientos y la formulación mixta en elasticidad. Gracias a estos conocimientos la integración reducida adquirió legítimamente la categoría de método. El éxito de la integración reducida radica en que ésta proporciona singularidad de manera

adecuada en las partes de la matriz de rigideces que actúan como restricción, evitándose de esta manera el bloqueo, o excesiva rigidez del elemento.

Las bases matemáticas para garantizar la convergencia y estabilidad de los elementos mixtos fueron establecidas en Babuska (1971) y en Brezzi (1974), dando lugar a la condición de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi, o LBB, en la forma como se conoce en nuestros días Brezzi y Bathe (1990). Básicamente ésta es una condición de estabilidad que establece restricciones de compatibilidad entre los campos de interpolación involucrados en la formulación mixta, necesarias para garantizar la convergencia y la unicidad de la solución.

A pesar de que el desarrollo de los elementos mixtos se remonta a algunas décadas atrás, su uso en aplicaciones prácticas de análisis estructural no se ha extendido paralelamente. Según Brezzi y Bathe (1990), la causa de esto es que la comprensión y predicción de su comportamiento es más difícil que en el caso de la formulación convencional de desplazamientos. Ante este tipo de dificultades se desarrollaron los métodos de estabilización. Estos métodos tienen por objetivo eliminar las inestabilidades numéricas.

Puesto que actualmente los programas comerciales solo utilizan la formulación mixta con desplazamientos en los nodos externos y presión en un nodo interno, en el presente trabajo se desarrollan e implantan en un programa las formulaciones mixtas que aproximan no solo los desplazamientos en los nodos externos, sino también las deformaciones y/o los esfuerzos, teniendo la ventaja que se pueden imponer los esfuerzos y deformaciones independientemente, además de los desplazamientos y fuerzas que permiten las aproximaciones de desplazamientos de elementos finitos.

1.3 Objetivos

El objetivo general de esta tesis es desarrollar, aproximar e implantar formulaciones mixtas de elementos finitos para obtener soluciones numéricas de problemas en sólidos elásticos, las cuales, tienen una mejor aproximación en los campos de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en comparación con una formulación estándar de desplazamientos; además, estas formulaciones de elementos finitos mixtos resuelven problemas de bloqueo.

1.4 Organización de la tesis

La organización de esta tesis se presenta en cinco capítulos:

- El *Capítulo 1* presenta la introducción de la tesis donde se explica brevemente el problema a estudiar, se describen los trabajos de investigación reportados en la literatura sobre formulaciones mixtas de elementos finitos. Se plantean los objetivos que se tienen para esta tesis.

- En el *Capítulo 2* se presenta el desarrollo de las formulaciones de elementos finitos, tanto estándar como formulaciones mixtas que incluyen las de desplazamiento-deformación, desplazamiento-esfuerzo; y desplazamiento-deformación-esfuerzo.
- El *Capítulo 3* presenta los algoritmos para la implementación numérica de las aproximaciones de las formulaciones de elementos finitos estándar y mixta. Además se describen los programas computacionales desarrollados para la solución de problemas elásticos.
- El *Capítulo 4* valida las formulaciones implementadas, resolviendo ejemplos los cuales se comparan con su solución exacta de algunos problemas reportados en la literatura. Se comparan las soluciones obtenidas con la formulación estándar de desplazamientos con las obtenidas de formulaciones mixtas.
- El *Capítulo 5* contiene las conclusiones derivadas de este trabajo de investigación, así como algunas recomendaciones, donde además se presentan ideas para el desarrollo de investigaciones futuras.

CAPÍTULO 2

Formulación de elementos finitos

En la formulación matemática de fenómenos físicos, las ecuaciones diferenciales o forma fuerte del problema establecen una condición local en cada punto del dominio. La solución exacta de estas ecuaciones en aplicaciones prácticas es, en general, muy complicada y se opta por buscar una solución aproximada mediante un método numérico. El procedimiento numérico más empleado en el análisis de problemas de ingeniería es el método de los elementos finitos. En la base de este método está la equivalencia de las ecuaciones del problema en formulación diferencial o fuerte con una formulación integral correspondiente. El procedimiento de solución de un problema por el método de elementos finitos consta de dos pasos fundamentales. El primero de ellos es el planteamiento del problema mediante un método variacional para obtener la forma débil equivalente, también denominada forma variacional. El segundo paso es la discretización mediante elementos finitos, con el fin de resolver la ecuación variacional en forma aproximada. En vez de verificar en forma local (punto a punto) las ecuaciones del problema se exige el cumplimiento de éstas en forma aproximada (en el dominio). La forma débil o variacional de un problema establece la condición global en el medio continuo en forma de una ecuación que se integra en todo el dominio. Esta forma se puede obtener directamente a partir de la forma diferencial mediante el método de residuos ponderados o derivándola de un funcional; aunque no es imprescindible que exista un funcional asociado al problema para poder expresarlo en forma débil. En cualquier caso, siempre es necesario definir dos tipos de funciones para el planteamiento de la forma débil. Según el método de Galerkin, ambos se definen de forma básicamente similar, excepto por los valores que adoptan en el contorno, (Hughes 1987, Zienkiewicz y Taylor 1994, Oñate 1992, entre otros). Estas funciones se denominan funciones de prueba por ser candidatas a la solución, además, se denominan también como variaciones por ser funciones de ponderación.

Puesto que un funcional representa el modelo matemático de un problema físico, la aplicación de los métodos variacionales es importante en varias áreas del conocimiento. La formulación variacional de un problema se presenta como un funcional, el cual tiene como condiciones de estacionaridad correspondientes a las ecuaciones de Euler-Lagrange, la forma fuerte del problema, con la diferencia, que la formulación variacional tiene ventajas sobre la formulación fuerte (Washizu 1967). Los funcionales son magnitudes variables cuyo valor se determinan mediante la elección de una o varias funciones. En los métodos variacionales de aproximación se trabaja con los campos independientes que están sujetos a variaciones, y campos dependientes que no lo están. Las aproximaciones se determinan tomando variaciones con respecto a los campos independientes (Valverde 2002).

El uso de formulaciones mixtas es indicado en una serie de aplicaciones en las que el método estándar irreducible de desplazamientos no es conveniente, o simplemente no es posible obtener una formulación irreducible que ofrezca buenos resultados. Las formulaciones mixtas se aplican principalmente en los siguientes casos:

- Problemas gobernados por ecuaciones diferenciales de alto orden. Este es el caso de problemas de flexión de placas. La presencia de derivadas de alto orden en la formulación irreducible implicaría para su aplicación elementos de mayor grado de continuidad. Se reemplaza la formulación irreducible por otra mixta, de menor grado. Para esto, se definen como variables independientes algunas de las que en la formulación irreducible serían derivadas de la variable primaria. Se puede optar así por campos de interpolación de continuidad C_0 , más sencillos de formular (Valverde 2002).
- Problemas con restricciones internas. Para evitar la verificación explícita de una restricción sobre un campo se introduce un campo adicional. Este es el caso de la incompresibilidad sobre el campo de desplazamientos. Las ventajas que ofrecen las formulaciones mixtas se logran, sin embargo, dentro de ciertas limitaciones. Los campos de interpolación deben cumplir ciertas condiciones de compatibilidad entre sí, como expresa la condición de estabilidad de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi, o LBB; de lo contrario no se podrá esperar resultados con sentido físico de estos elementos. El criterio de estabilidad deja al margen de la aplicabilidad ciertas combinaciones de los campos de interpolación. Los métodos de estabilización tienen por objetivo eludir el requisito de compatibilidad entre los campos de interpolaciones en formulaciones mixtas. Gracias a los métodos de estabilización se logra que estos elementos, con combinaciones de interpolaciones que en principio serían descartadas, ofrezcan un comportamiento estable (Valverde, 2002).

El comportamiento del material se describe por un modelo constitutivo mediante la relación esfuerzo deformación. De la figura 2.1 el área bajo la función de esfuerzos, $\sigma(\epsilon)$, corresponde a la densidad de energía de deformación, $\psi(\epsilon)$, definida por:

$$\psi(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon \quad (2.1)$$

Y la densidad de energía complementaria es el área sobre la función de deformaciones:

$$\psi_c(\epsilon) = \int_0^\sigma \epsilon(\sigma) d\sigma \quad (2.2)$$

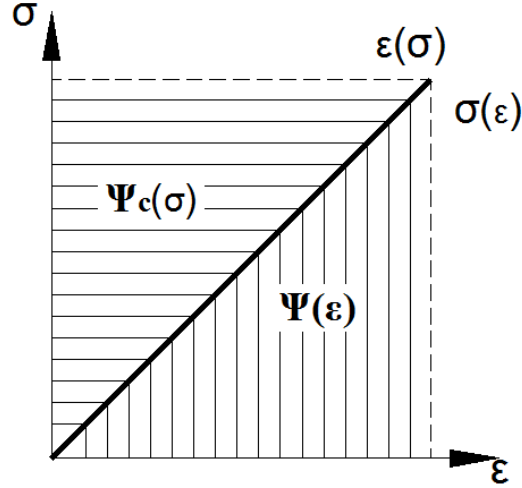


Figura 2.1 Modelo constitutivo elástico lineal

El estado de esfuerzos se deriva de la ecuación (2.1) y el estado de deformaciones se deriva de la ecuación (2.2):

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{\partial \Psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (2.4)$$

2.1 Problemas de valores en la frontera

En las formulaciones aquí presentadas un campo dependiente se identifica cuando se escribe su campo independiente como un superíndice, *e.g.*, σ^ε . Cuando no aparece superíndice en la variable, se indica que el campo es independiente.

Para la simulación o representación de un proceso o un fenómeno físico, una de las partes fundamentales es su planteamiento matemático, que en su forma fuerte se le conoce como un problema de valores en la frontera (PVF), el cual generalmente se representa por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias definidas sobre una región o intervalo, y de un conjunto de condiciones de frontera, que especifican los valores de las variables involucradas y de sus derivadas de la frontera del intervalo o región. La forma fuerte se refiere a que la solución del PVF debe satisfacer cada punto del dominio donde se define el problema.

Considere un medio continuo tridimensional, cuyo comportamiento del material es elástico lineal con deformaciones pequeñas, con un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^3$, puntos materiales x y frontera Γ con vector normal \mathbf{v} , como se muestra en la figura 2.2, el cual se somete a las acciones del vector de fuerzas de cuerpo \mathbf{b} en el interior del continuo, a las tracciones prescritas \mathbf{t}^* en

Γ_σ y los desplazamientos prescritos \mathbf{u}^* en Γ_u . La frontera Γ del continuo está constituida por dos superficies Γ_u y Γ_σ ; Γ_u corresponde a la región con desplazamientos prescritos (conocidos) y Γ_σ corresponde al resto de la frontera que incluye aquellas porciones donde se aplican las cargas prescritas, de tal forma que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$.

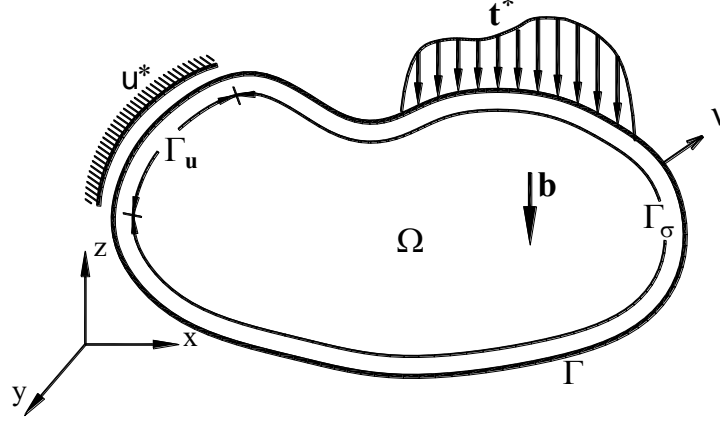


Figura 2.2 Continuo con dominio Ω

El PVF del problema elástico lineal se define en forma fuerte por las siguientes ecuaciones y condiciones de frontera:

a)	$\boldsymbol{\varepsilon}^u(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$	en Ω	Compatibilidad cinemática	
b)	$\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$	en Ω	Compatibilidad constitutiva	
c)	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$	en Ω	Equilibrio interno	
d)	$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t}^*(\mathbf{x})$	en Γ_σ	Equilibrio externo	(2.5)
e)	$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$	en Γ_u	Condiciones naturales	
f)	$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x})$	en Γ_u	Condición esencial	

2.2 Funcionales de energía

En todas las formulaciones que a continuación se presentan, se considera la relación de las tracciones \mathbf{t} , y los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ están dados por:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2.6)$$

donde \mathbf{v} es el vector normal a la frontera Γ_u .

2.2.1 Funcional \mathbf{u}

El MEF proporciona soluciones aproximadas mediante la discretización de dominios que extremizan un funcional de energía, como el de desplazamientos:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.7)$$

donde el vector de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ y el de desplazamientos \mathbf{u} , están dados respectivamente como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Siendo u, v y w las componentes de desplazamiento en las respectivas direcciones x, y y z .

2.2.2 Funcional $\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon}$

El funcional de energía con el desplazamiento y deformación como variables independientes se define como:

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}^u - \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (2.9)$$

La compatibilidad entre deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ y desplazamientos \mathbf{u} para un sólido elástico lineal es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^u(\mathbf{x}) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

y la densidad de energía de deformación se define como:

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.11)$$

La matriz constitutiva \mathbf{C} para problemas en 2D se define como:

$$\mathbf{C} = d_1 \begin{bmatrix} 1 & d_2 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

para el caso de esfuerzo plano $\sigma_{zz}=0$ y $\varepsilon_{zz} \neq 0$:

$$d_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; d_2 = \nu; d_3 = \frac{1-\nu}{2} \quad (2.13)$$

y para el caso de deformación plana $\sigma_{zz} \neq 0$ y $\varepsilon_{zz} = 0$:

$$d_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; d_2 = \frac{\nu}{1-\nu}; d_3 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (2.14)$$

Siendo ν la relación de Poisson.

2.2.3 Funcional $\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}$

El funcional de energía con el desplazamiento y esfuerzo como variables independientes es:

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \equiv \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}'' - \Psi_c(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (2.15)$$

donde la densidad de energía de deformación complementaria se define como:

$$\Psi_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.16)$$

2.2.4 Funcional $\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\varepsilon}$

En el funcional de tres campos es posible aproximar independientemente los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos. Considerando el principio variacional de Hu-Washizu

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}'' - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (2.17)$$

2.3 Aproximación con elementos finitos

2.3.1 Aproximación \mathbf{u}

El desplazamiento se aproxima como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (2.18)$$

donde \mathbf{N} es la matriz que contiene las funciones de aproximación (interpolación) y \mathbf{d} es el vector de los desplazamientos nodales. Las ecuaciones de rigidez necesarias se obtienen en función del vector de desplazamientos incógnita \mathbf{u} y a partir de estas la solución.

Las deformaciones se relacionan con los desplazamientos a través del operador diferencial matricial \mathbf{B} :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (2.19)$$

$$B = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Aproximación del campo de esfuerzo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{CB}(\mathbf{x}) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Extremización del funcional. Sustituyendo las ecs. (2.19) a ecs.(2.21) en la ec. (2.7):

$$\Pi(d) = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \mathbf{d}^T B^T C B d d \Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{d}^T N^T \mathbf{b} d \Omega - \int_{\Gamma_{\sigma e}} \mathbf{d}^T N^T \cdot \mathbf{t}^* d \Gamma - \mathbf{d}^T N^T F \Big|_{\Gamma_{\sigma e}} \quad (2.22)$$

En las formulaciones mixtas el esfuerzo σ y las deformaciones ε pueden ser aproximadas de forma independiente, a continuación se presentan estas formulaciones.

2.3.2 Aproximación u- ε

En esta aproximación mixta las deformaciones ε se aproximan de forma independiente. El trabajo virtual para la aproximación u- ε se define como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^u - \boldsymbol{\sigma}^e) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^e + \mathbf{b}^*) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}^e \cdot \mathbf{v} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \delta \boldsymbol{\sigma}^e d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

en la aproximación mediante MEF de los campos independientes se tiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_d \mathbf{d} \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{N}_e \mathbf{e} \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_{\sigma} \boldsymbol{\gamma} \quad (2.26)$$

donde \mathbf{N}_d contiene las funciones de forma del vector de desplazamiento nodal \mathbf{d} ; \mathbf{N}_e las de deformaciones nodales \mathbf{e} ; y \mathbf{N}_{σ} las de los esfuerzos nodales $\boldsymbol{\gamma}$. Los campos dependientes de deformación y esfuerzo se determinan como:

$$\varepsilon^u = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e(\varepsilon) = \boldsymbol{\sigma}^e(N_\varepsilon \mathbf{e}) \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u} = \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u}(\varepsilon^u) = \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{B}\mathbf{d}) \quad (2.29)$$

donde \mathbf{B} es la matriz de transformación de desplazamientos estándar, que contiene las derivadas de las funciones de forma, definido en la ec. (2.23), y los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u}$ y $\boldsymbol{\sigma}^e$ están dados por las ecuaciones siguientes:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon^u)}{\partial \varepsilon^u} \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \frac{\partial \Psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (2.31)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.28),(2.29),(2.30) y (2.31) en la ec. (2.23) y asumiendo que los desplazamientos, $u^* = u$ en la frontera Γ_u , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Gamma^T (\boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{B}\mathbf{d}) - \boldsymbol{\sigma}^e(\Gamma \mathbf{e})) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^e(\Gamma \mathbf{e}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}^* d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3.3 Aproximación u - σ

El trabajo virtual para la aproximación u - σ se define como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\varepsilon^u - \varepsilon^\sigma) : \delta \boldsymbol{\sigma} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}^*) \cdot \delta \mathbf{u}] d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \delta \boldsymbol{\sigma} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

en la aproximación mediante MEF de los campos independientes se tiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \Gamma \boldsymbol{\alpha} \quad (2.35)$$

donde Γ contiene las funciones de forma de los esfuerzos $\boldsymbol{\alpha}$ nodales, los campos dependientes se determinan respectivamente por las ecuaciones (2.3) y (2.10), como:

$$\varepsilon^u = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.36)$$

$$\varepsilon^\sigma = \varepsilon(\Gamma \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{D}_\alpha \Gamma \boldsymbol{\alpha} \quad (2.37)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.34) a (2.37) en la ecuación (2.33) y asumiendo que los desplazamientos, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$, en la frontera Γ_u , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Gamma^T (\varepsilon^d(\mathbf{B}\mathbf{d}) - \varepsilon^\sigma(\Gamma\alpha)) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\Gamma\alpha) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}^* d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.3.4 Aproximación \mathbf{u} - $\boldsymbol{\sigma}$ - $\boldsymbol{\varepsilon}$

Aproximación mixta donde los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos se aproximan de forma independiente, funcional conocido en la literatura como Hu-Washizu.

El funcional de tres campos se obtiene como:

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (2.39)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.19) a (2.21), (2.31) y (2.39) en la ec. (2.39), se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{N}_\varepsilon^T [\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma}(\gamma)] d\Omega &= \mathbf{0} \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}_\sigma^T [\varepsilon^d(\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{d}) - \varepsilon^e(\mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{e})] d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{v} \cdot [\mathbf{N}_d \mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}] d\Gamma &= \mathbf{0} \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\gamma) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_d^T \mathbf{v} \mathbf{N}_\sigma \gamma d\Gamma - \mathbf{F}_{\text{ext}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.4 Linealización

2.4.1 Aproximación \mathbf{u}

Derivando la ecuación (2.22) respecto al vector \mathbf{d} se obtiene el valor extremo del funcional:

$$\frac{\partial \Pi(d)}{\partial d} = 0 = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega d - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma e}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma - \mathbf{N}^T F|_{\Gamma_{\sigma e}} \quad (2.41)$$

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega d = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma e}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma + F \quad (2.42)$$

2.4.2 Aproximación \mathbf{u} - $\boldsymbol{\varepsilon}$

La linealización de las ecuaciones constitutivas $\boldsymbol{\sigma}^e = \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{e})$ y $\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{B}\mathbf{d})$ en la ec. (2.32) es:

$$\begin{pmatrix} -\int_{\Omega} \Gamma^T \mathbf{C}^e \Gamma d\Omega & \int_{\Omega} \Gamma^T \mathbf{C}^d \mathbf{B} d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \Gamma d\Omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta e \\ \Delta d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma_u} \Gamma^T \boldsymbol{\sigma}^e (\Gamma e) d\Omega - \int_{\Omega} \Gamma^T \boldsymbol{\sigma}^d (\mathbf{B} d) d\Omega \\ F_{ext} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^e (\Gamma e) d\Omega \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

siendo el primer término del residuo la compatibilidad cinemática entre los esfuerzos, y el segundo término, equilibrio entre fuerzas externas y fuerzas internas.

donde:

$$\mathbf{C}_e^T = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^e}{\partial \varepsilon(\Gamma \mathbf{e})} \quad \mathbf{C}_d^T = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^d}{\partial \varepsilon^u(\mathbf{B} d)}$$

es el tensor constitutivo tangente y es la relación entre esfuerzos y deformaciones, llamada curva esfuerzo-deformación, ver figura 2.3, donde $\boldsymbol{\sigma}$ y ε pueden ser independientes, dependientes o la combinación de los dos campos.

La relación \mathbf{C}^T es positiva en la rama ascendente y negativa en la rama descendente. En la formulación u- ε hay dos tensores constitutivos tangentes \mathbf{C}_e^T , la relación entre σ^e y ε^e , y \mathbf{C}_d^T la relación entre σ^d y ε^d . Por lo tanto, es necesario calcular dos veces el tensor constitutivo tangente y el estado de esfuerzos en cada punto de gauss.

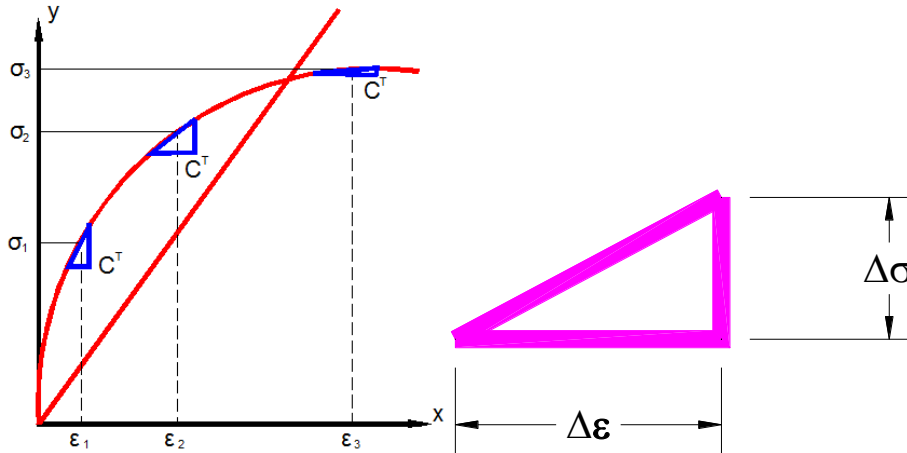


Figura 2.3 Modelo constitutivo elástico esfuerzo-deformación

2.4.3 Aproximación u- σ

La linealización de las ecuaciones constitutivas $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma})$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\gamma}(\boldsymbol{\gamma})$ en la ec. (2.38) es:

$$\begin{bmatrix} -\int_{\Omega} \Gamma^T \mathbf{D}_{\alpha}^T \Gamma d\Omega & \int_{\Omega} \Gamma^T \mathbf{B} d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \Gamma d\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \Gamma^T \varepsilon^{\alpha} (\mathbf{D}_{\alpha} \Gamma \alpha) d\Omega - \int_{\Omega} \Gamma^T \varepsilon^d (\mathbf{B} d) d\Omega \\ \mathbf{F}_{ext} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{\alpha} (\Gamma e) d\Omega \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Donde el primer término del residuo es la compatibilidad cinemática entre las deformaciones, y el segundo término, equilibrio entre fuerzas externas y fuerzas internas calculadas de los esfuerzos independientes.

donde:

$$\mathbf{D}_{\alpha}^T = \frac{\partial \varepsilon^{\sigma}(\Gamma \alpha)}{\partial \sigma^{\alpha}(\Gamma \alpha)} \quad \mathbf{D}_{\alpha}^T = (\mathbf{C}_{\alpha}^T)^{-1}$$

es el tensor constitutivo de flexibilidades.

La relación \mathbf{D}^T es positiva en la rama ascendente y negativa en la rama descendente. En la formulación $u-\sigma$ solo hay una relación \mathbf{D}^T entre ε^{γ} y σ^{γ} , pero el tensor \mathbf{D}^T podría volverse no acotado cuando hay dos estados de deformaciones para un estado de esfuerzo, la compatibilidad cinemática del primer término del residuo no se satisface. Esto puede ser un inconveniente en la implantación de la formulación $u-\sigma$, dado que podría generar inestabilidad numérica.

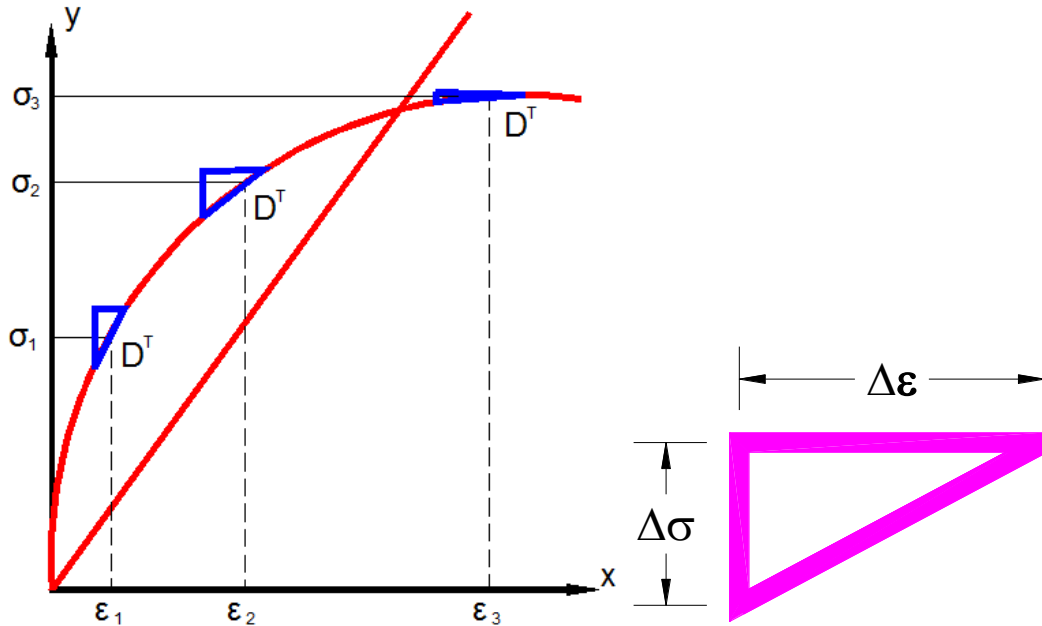


Figura 2.4 Modelo constitutivo elástico deformación-esfuerzo

2.4.4 Aproximación $u-\sigma-\varepsilon$

La linealización para la formulación de tres campos está dada por:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\varepsilon}^T \mathbf{C}_{\varepsilon}^T \mathbf{N}_{\varepsilon} d\Omega & -\int_{\Omega} \mathbf{N}_{\varepsilon}^T \mathbf{N}_{\sigma} \mathbf{d} d\Omega & 0 \\ (-\int_{\Omega} \mathbf{N}_{\sigma}^T \mathbf{N}_{\varepsilon} d\Omega)^T & 0 & \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\sigma}^T \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_{\sigma}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_d d\Gamma \\ 0 & \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{N}_{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_{\sigma}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_d d\Gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta e \\ \Delta \gamma \\ \Delta d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

donde los residuos se definen como:

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\varepsilon}^T \left[\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}(\mathbf{N}_{\sigma} \gamma) - \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{N}_{\varepsilon} \mathbf{e}) \right] d\Omega \\ R_2 &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\sigma}^T \left[\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{N}_{\varepsilon} \mathbf{e}) - \boldsymbol{\varepsilon}^d(\Delta d) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_{\sigma}^T \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{d}} d\Gamma \\ R_3 &= F_{ext} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}(\gamma) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_d^T \mathbf{v} \mathbf{N}_{\sigma} \gamma^{\gamma} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.46)$$

El residuo R_2 es la compatibilidad cinemática entre las deformaciones, incluye el desplazamiento impuesto \bar{d} y el residuo R_3 , equilibrio entre fuerzas externas y fuerzas internas.

CAPÍTULO 3

Implementación numérica

3.1 Organización de programación

En este capítulo se consideran los aspectos relativos al desarrollo de los programas de elementos finitos tanto para la formulación estándar, como de la formulaciones mixtas para problemas elásticos lineales.

La programación consta de un programa principal, el cual a su vez está asociado a una serie de subrutinas, las cuales calculan cada uno de los pasos necesarios para el proceso de solución global. La organización de forma básica del proceso de cálculo del programa inicia mediante la lectura de un archivo de entrada el cual contiene la información del problema a modelar, el cual se le ha denominado módulo de preproceso, después se inicia el módulo de procesado y finalmente el módulo de postproceso en el cual se imprimen los resultados del problema.

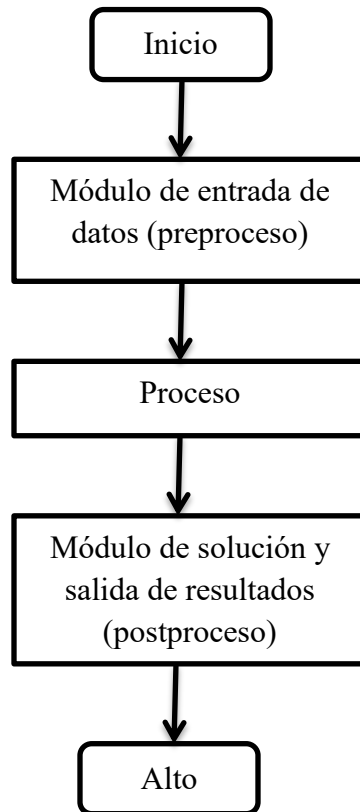


Figura 3.1 Esquema simplificado del programa de elementos finitos.

3.1.1 Organización del programa

El programa está organizado como a continuación se describe:

1. Programa principal. En esta rutina se controlan todas las subrutinas que están asociadas al programa principal, lectura de datos, preproceso, procesador, y postproceso
2. Lectura de datos. Lee la información del archivo de entrada el cual contiene la información del problema a modelar, coordenadas, conectividades, propiedades del material, fuerzas, condiciones de frontera.
3. Preproceso. Se generan los vectores y matrices de cargas y condiciones de frontera del problema, y se determinan los grados de libertad para cada elemento.
4. Procesado. Cálculo de las funciones de forma, ensamble de la matriz global de rigideces, cálculo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos e imposición de las variables prescritas.
5. Postproceso. En esta subrutina se grafica la configuración deformada del elemento, estados de esfuerzos y deformaciones.

Modelado del problema

El modelo de elementos finitos del problema se introduce mediante un archivo de entrada de datos que se prepara según las instrucciones que se detallan más adelante en este capítulo. El programa incluye una opción sencilla para gráficos el cual muestra el elemento modelado en su condición deformada, y se genera un archivo de salida en el cual se muestran los resultados de desplazamientos, esfuerzos y deformaciones que resultan de la solución del problema. El archivo de datos consiste básicamente en cantidades asociadas a los nodos (coordenadas, datos de condiciones de contorno, cargas) y cantidades asociadas a los elementos (conectividad, propiedades de los materiales, siendo E el módulo de elasticidad, ν es la relación de Poisson y G el módulo de rigidez a corte).

El formato del archivo de entrada de datos, esquematizado en la tabla 1, debe contener la suficiente información que modele adecuadamente el problema a resolver, este archivo de entrada se utiliza para leer los datos necesarios acerca de la geometría, materiales y fuerzas actuantes para que se puedan generar todas las matrices de elementos finitos necesarias para la solución del problema se generan un conjunto de matrices que almacenan las coordenadas nodales, conectividad de los elementos, las propiedades del material, condiciones de contorno, fuerzas nodales y los desplazamientos prescritos.

Tabla 1. Entrada de datos

Datos para el análisis	
Nn	Número de nodos
Ne	Número de elementos
Ta	Opción de análisis 1=esfuerzo plano; 2=deformación plana
Nnl	Número de fuerzas nodales
Nbc	Número de condiciones de frontera
Npv	Número de variables prescritas
Ndof	Número de grados de libertad por nodo
Nen	Número de nodos por elemento
Nmat	Número de materiales
Nst	Numero de pasos para la solución de Newton-Raphson con control de desplazamiento
Propiedades mecánicas del material	
Número de material	E su GfI
matprop=[];	
Coordenadas nodales de la malla	
Nodo	x y
coord=[];	
Conectividad de los elementos	
Elemento	material espesor i j k
elemt=[];	
Condiciones de frontera	
Nodo	x y
cond=[];	
Fuerzas nodales	
Nodo	x y
loads=[];	
Variables prescritas	
Nodo	x y
displ=[];	

La generación de coordenadas y de conectividad de la malla para los datos del archivo de entrada se realiza a base de elementos triangulares, la entrada de coordenadas es a base de una matriz de **n** renglones por 3 columnas, siendo los valores de las columnas el número de nodo, su coordenada en dirección **x** y su coordenada **y** respectivamente, en la figura 3.2 se muestra un ejemplo de la numeración de nodos y elementos.

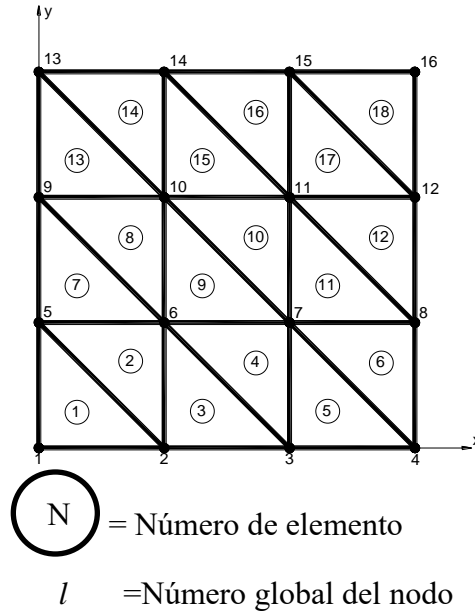


Figura 3.2 Ejemplo de mallado con numeración de elementos y nodos

También se proporcionan las propiedades del material asociado a cada elemento, las cargas y las restricciones para cada nodo, en la mayoría de los casos, varios elementos tienen las mismas propiedades de materiales por lo que no es necesario especificar las propiedades individuales para cada uno por lo que con definir una sola vez el material es suficiente.

Deben definirse las fuerzas o desplazamientos nodales asociados a cada grado de libertad, el valor de carga se almacena en la matriz “cargas” y los desplazamientos nodales en la matriz “desp”. En muchos problemas, las cargas pueden ser distribuidas a lo largo del elemento por lo que deben convertirse en fuerzas nodales para introducirse en el archivo de entrada y así ser asignada al nodo en el que esta fuerza será aplicada y colocada en la dirección en que está actuando.

La salida de resultados es a base de un archivo en el cual se muestran los resultados obtenidos, para la solución con el programa de la formulación estándar de desplazamientos, se obtienen los desplazamientos, además de los esfuerzos y las deformaciones en cada elemento, para las formulaciones mixtas se obtienen los desplazamientos, las deformaciones y esfuerzos independientes en los nodos, así como las deformaciones y esfuerzos dependientes de los desplazamientos.

3.2 Implementación

3.2.1 Formulación u

En la figura 3.3 se muestran los procesos que se utilizaron para la programación de la formulación estándar de desplazamientos.

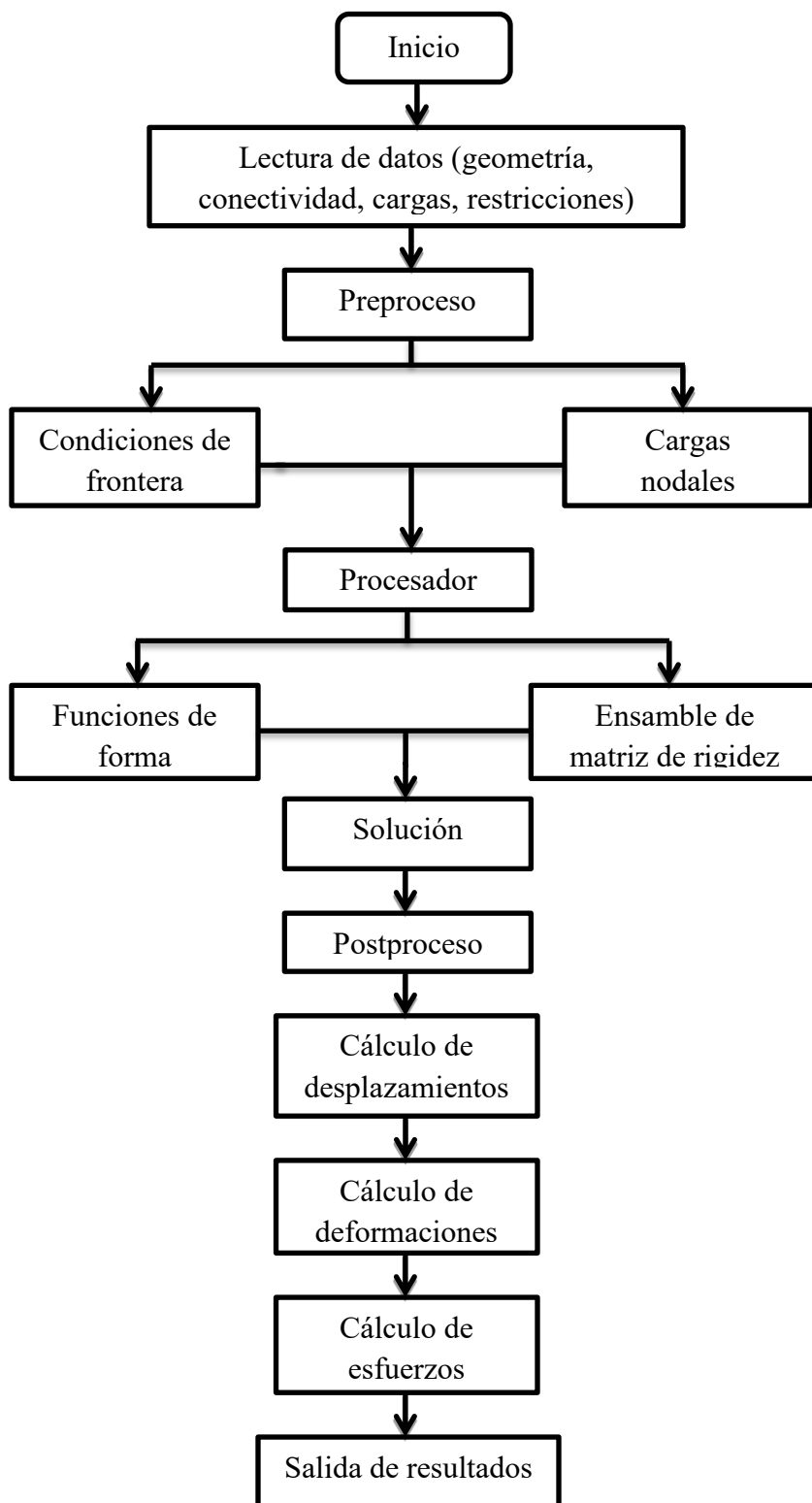


Figura 3.3 Esquema del programa de elementos finitos formulación estándar

3.2.2 Formulación $u-\epsilon$

En la figura 3.4 se muestran los procesos que se utilizaron para la programación de la formulación mixta $u-\epsilon$, donde los desplazamientos y deformaciones se aproximan independientemente.

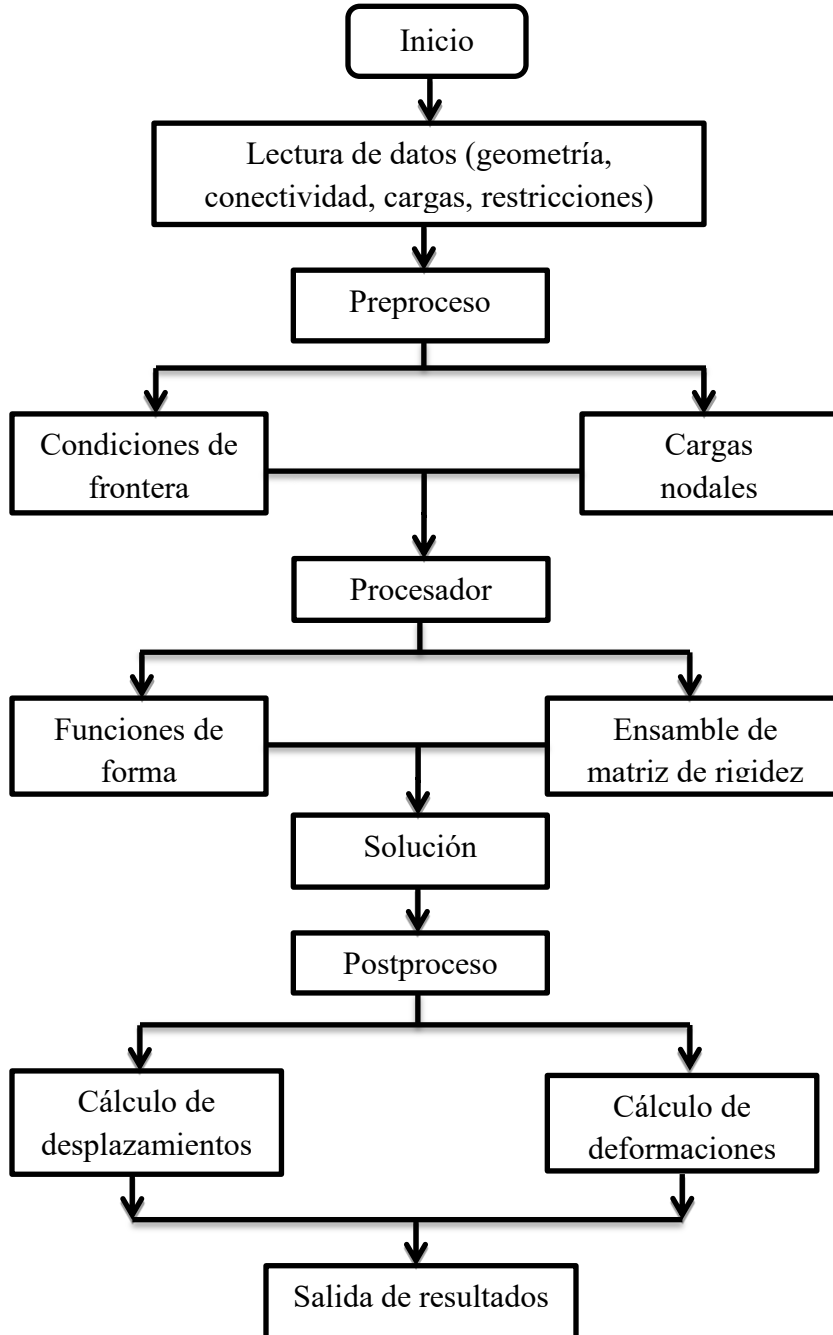


Figura 3.4 Esquema del programa de elementos finitos formulación $u-\epsilon$

3.2.3 Formulación $u-\sigma$

En la figura 3.5 se muestran los procesos que se utilizaron para la programación de la formulación mixta $u-\sigma$, donde los desplazamientos y esfuerzos se aproximan independientemente.

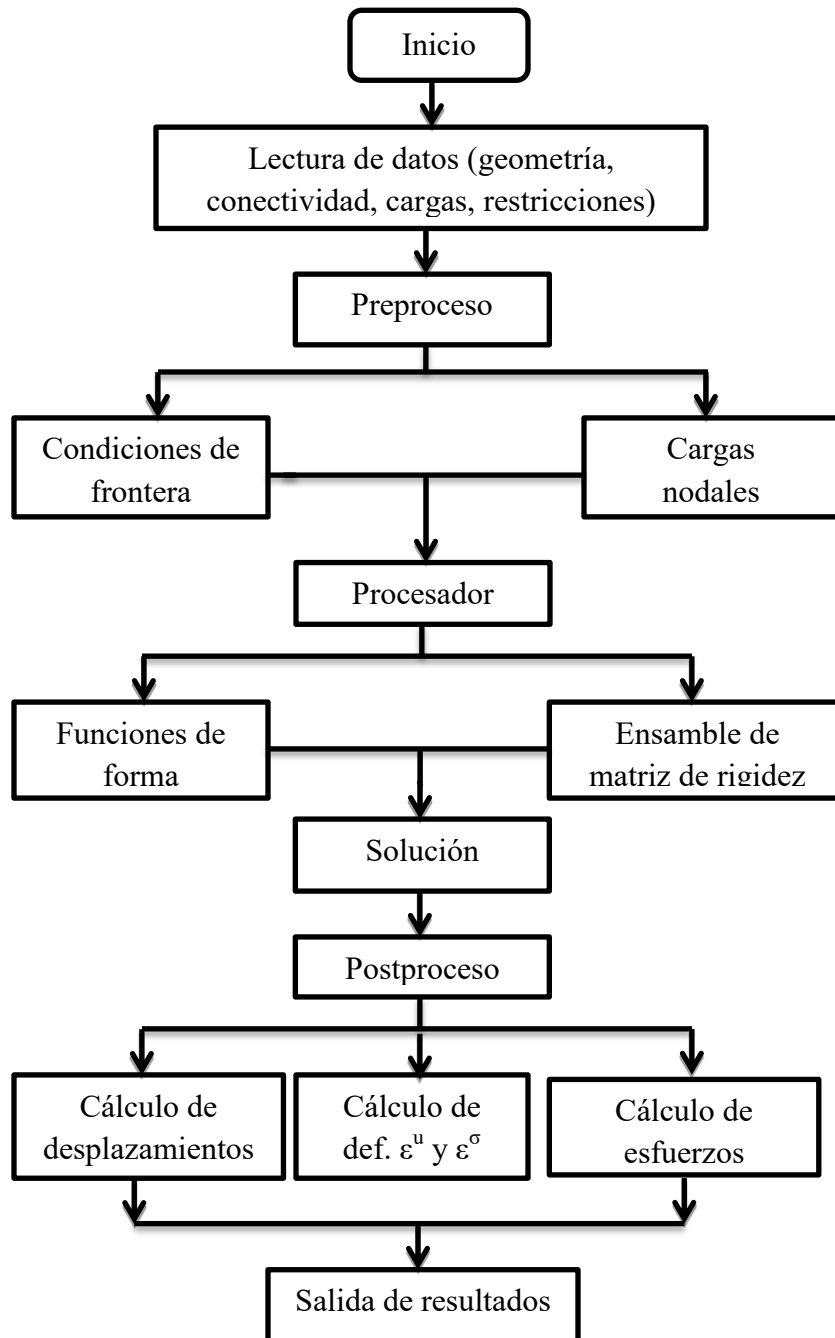


Figura 3.5 Esquema del programa de elementos finitos formulación $u-\sigma$

3.2.4 Formulación $u-\sigma-\epsilon$

En la figura 3.6 se muestran los procesos que se utilizaron para la programación de la formulación mixta, $u-\sigma-\epsilon$, donde los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones se aproximan independientemente.

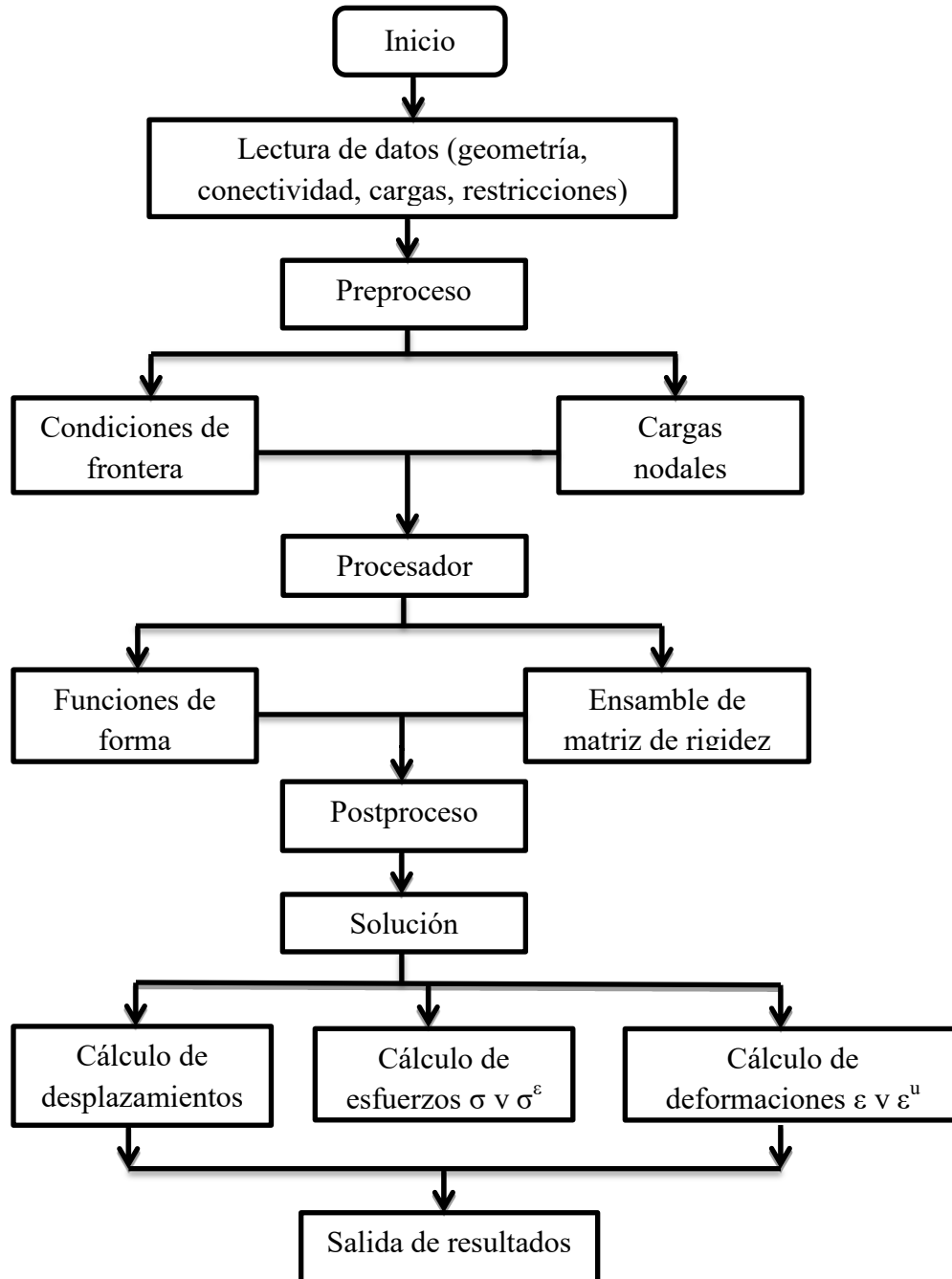


Figura 3.6 Esquema del programa de elementos finitos formulación $u-\sigma-\epsilon$

CAPÍTULO 4

Ejemplos de Aplicación

4.1 Validación

Se verificó la validez de los programas computacionales desarrollados en esta tesis a través de la solución de ejemplos numéricos reportados en la literatura, todos los problemas se discretizaron con mallas de elementos triangulares.

En este capítulo se muestran los resultados de problemas resueltos con el programa de elementos finitos con aproximación de desplazamientos los cuales se comparan con los resultados obtenidos con los programas desarrollados para las formulaciones mixtas, las coordenadas de los nodos y la conectividad de los elementos se introducen en el archivo de datos para poder ejecutar el programa de elementos finitos.

En la primera parte del trabajo se desarrolló un programa de elementos finitos con la aproximación de desplazamientos. Para validar los resultados del programa se resolvieron ejemplos, los cuales se compararon con su solución exacta. Una vez que se validaron los resultados se realizó la programación de las formulaciones mixtas, resolviendo los mismos ejemplos tratados con la formulación estándar de desplazamientos.

4.2 Viga en cantiléver

El primer ejemplo que se realizó fue tomado del libro de Timoshenko, (1951) el cual consiste en una viga en voladizo que está sujeta a una carga $P=2,500\text{kgf}$ y empotrada en el lado izquierdo, como se muestra en la figura 4.1. La viga tiene un peralte de $h=30\text{cm}$, espesor de $e=20\text{ cm}$ y longitud $L=90\text{cm}$. La viga es de concreto simple con un módulo elástico $E=221,359.436\text{ kgf/cm}^2$ y una relación de Poisson $\nu=0.2$. Se realizaron 5 mallas triangulares distintas, las cuales constaron de 2, 8, 32, 128 y 512 elementos, respectivamente, como se muestra en la figura 4.2.

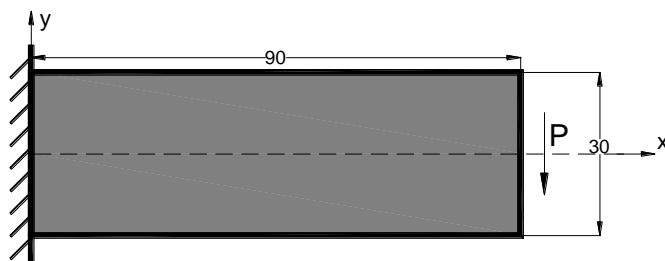


Figura 4.1 Viga en cantiléver

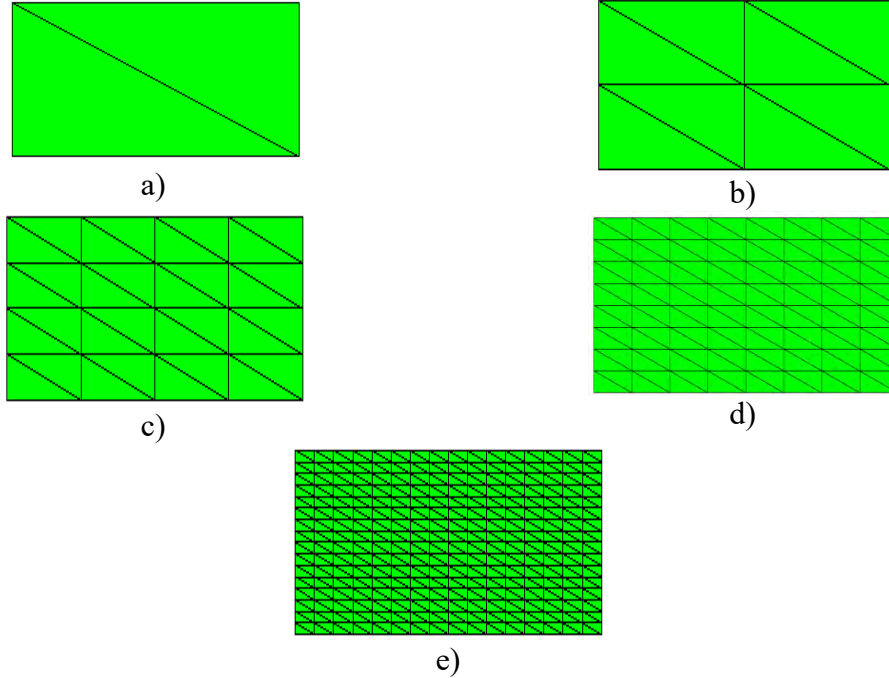


Figura 4.2 Mallado de viga con: a) 2, b)8, c)32, d)128 y e)512 elementos

En la figura 4.3 se muestra la viga deformada con la malla de 128 elementos, la solución exacta de desplazamiento para el problema de la viga en cantiléver se calcula con la siguiente ecuación:

$$d = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{P \cdot L}{G \cdot A_s} \quad (3.1)$$

donde P es la carga a la que se somete la viga, L es la longitud, E es el modulo elástico, I es el momento de inercia, G el modulo de rigidez a cortante y A_s el área de cortante de la viga.

El cálculo de la energía interna se obtiene como sigue:

$$W_i = \frac{P^2 \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{P^2 \cdot L}{2 \cdot G \cdot A_s} \quad (3.2)$$

y el trabajo externo como:

$$W_e = \frac{P \cdot d}{2} \quad (3.3)$$

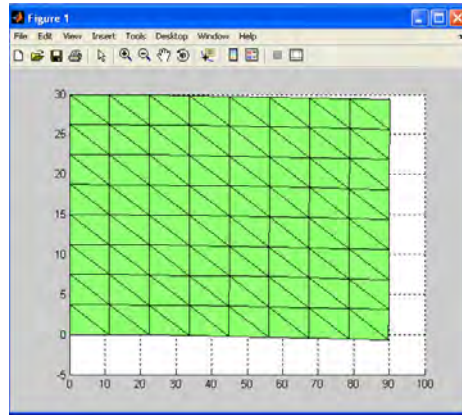


Figura 4.3 Viga deformada Matlab

El resultado exacto calculado con la ecuación (3.1) para el desplazamiento vertical es $d=0.064\text{cm}$, para la energía interna $W_i=80.299\text{ kgf.cm}$. En la figura 4.4 se presenta la gráfica de desplazamientos de las 5 mallas utilizadas para el problema resuelto con el programa de la formulación estándar de desplazamientos, la formulación mixta desplazamiento-deformación y desplazamiento esfuerzo, y en la figura 4.5 se muestran la energía para la solución exacta y la calculada con las mismas aproximaciones.

De la figura 4.4 y 4.5 se observa que con la formulación estándar, a diferencia de la mixta, se necesita de un mallado más fino para aproximarse a la solución exacta, mientras que con las formulaciones mixtas se consigue una mejor aproximación a la solución exacta con menos elementos finitos, lo cual representa una mejora en tiempo de cálculo.

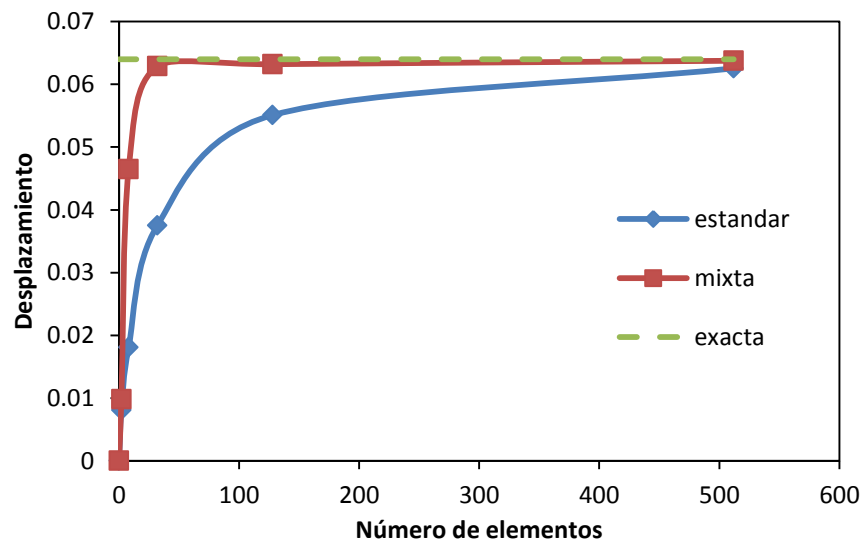


Figura 4.4 Desplazamientos

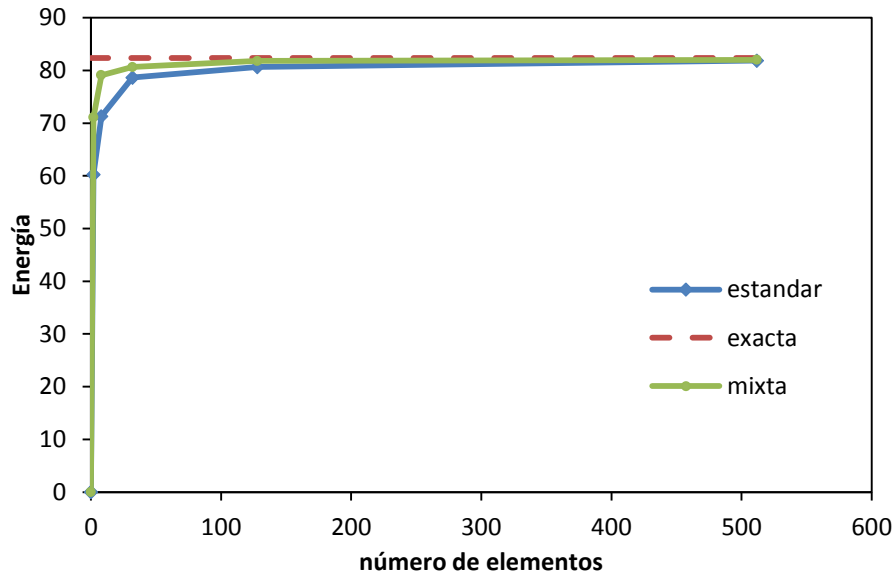


Figura 4.5 Energía

En la figura 4.6 se muestran los desplazamientos en cm de la viga con 32 elementos, el valor de desplazamiento para las formulaciones mixtas se aproximan en un 97% a la solución exacta, mientras que con la formulación estándar de desplazamientos se tiene una aproximación del 58%.

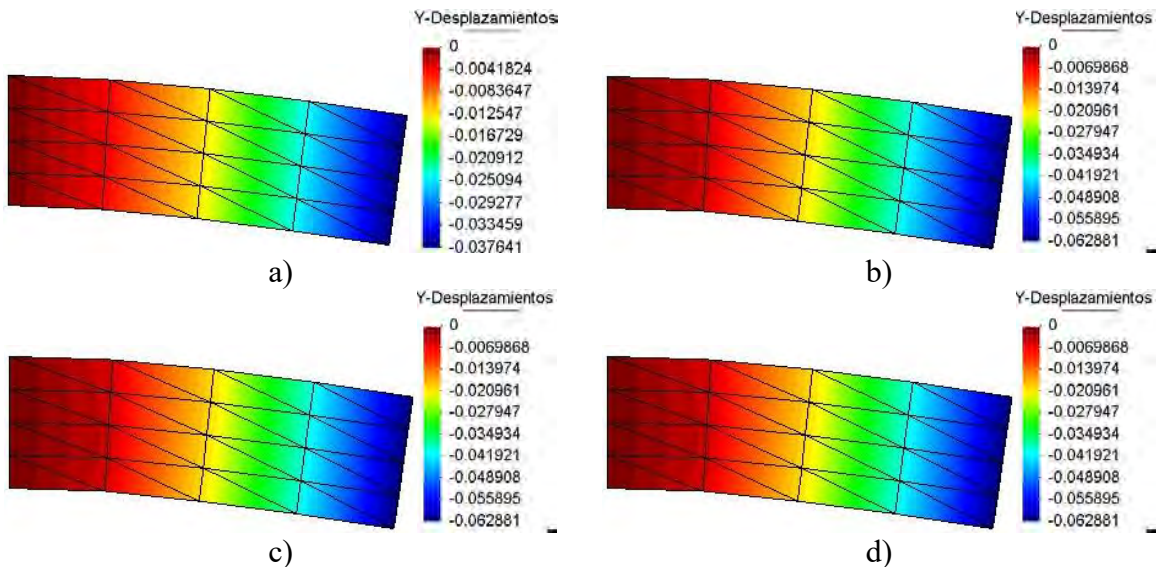


Figura 4.6 Viga deformada formulación a) u, b) u-ε, c) u-σ y d) u-ε-σ

En las figuras 4.7 a 4.11 se muestran las comparaciones para los resultados de esfuerzos en kgf/cm^2 , obtenidos con la formulación estándar de desplazamientos, la formulación mixta desplazamiento-esfuerzo y desplazamiento-deformación-esfuerzo, donde se observa que se tiene una mejor distribución de los esfuerzos en los resultados obtenidos con las formulaciones mixtas.

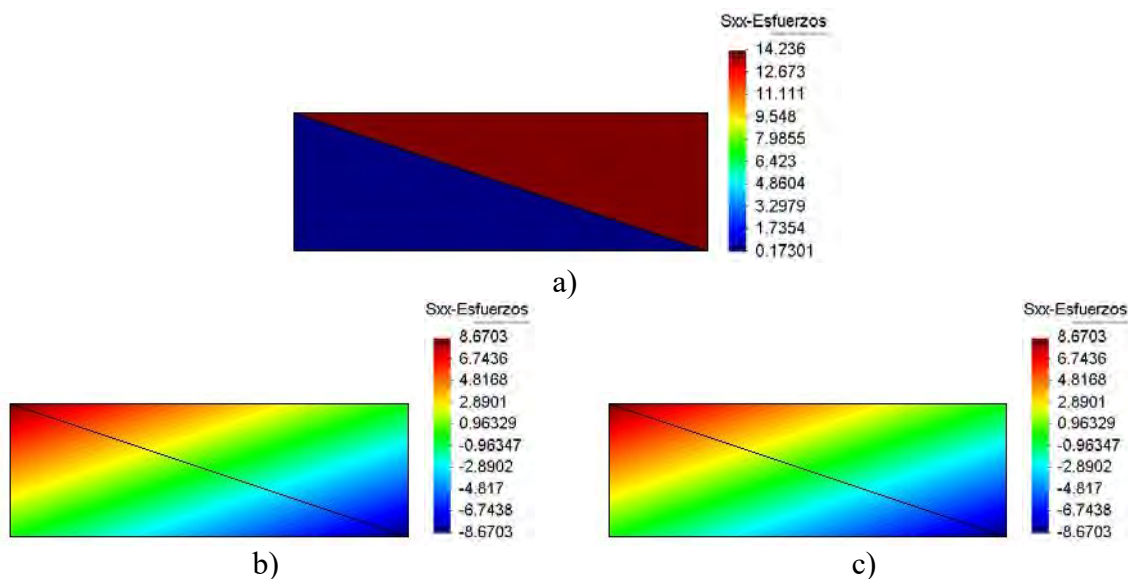


Figura 4.7 Esfuerzos σ_x de viga con 2 elementos formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$

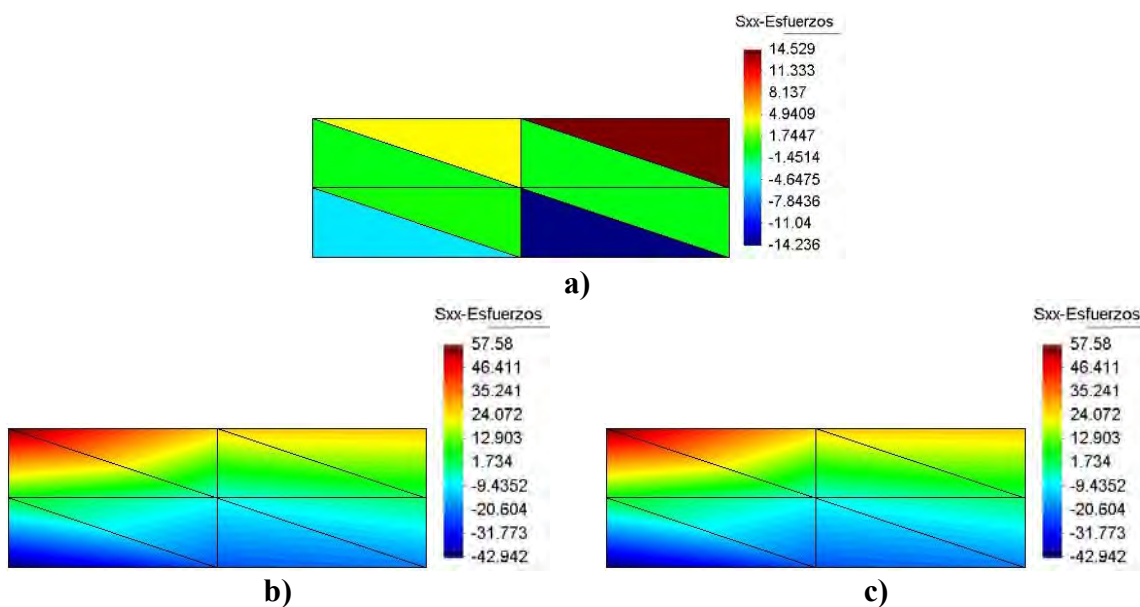


Figura 4.8 Esfuerzos σ_x de viga con 8 elementos formulación a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$

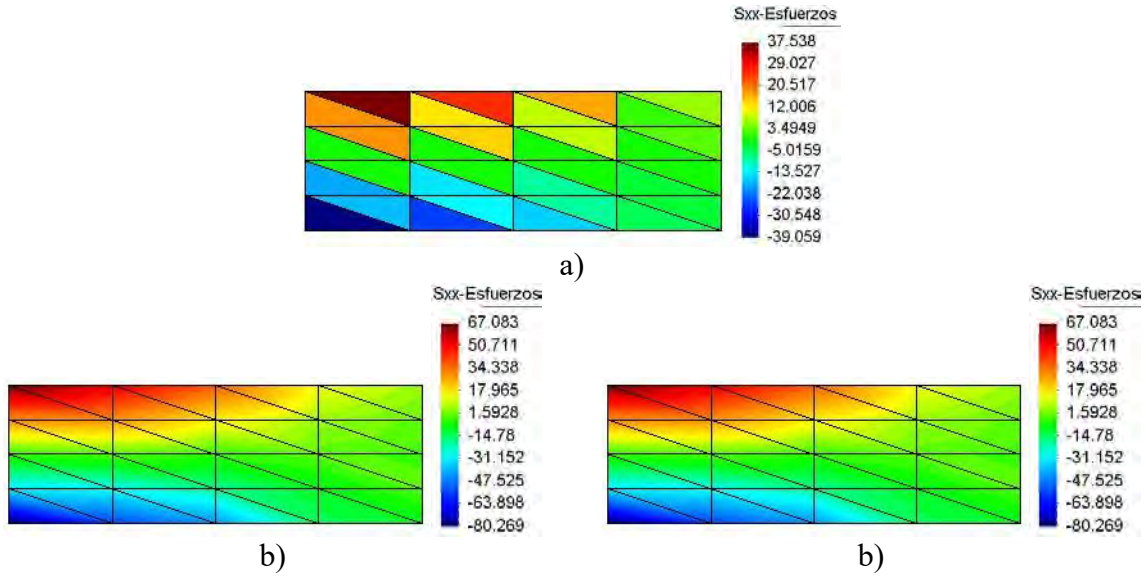


Figura 4.9 Esfuerzos σ_x de viga con 32 elementos formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

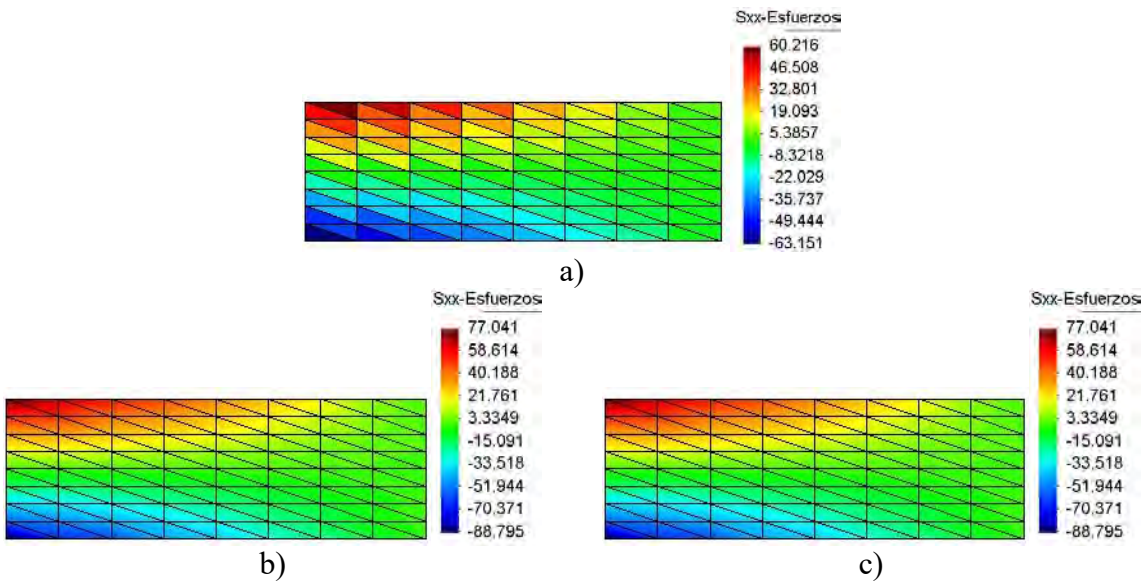
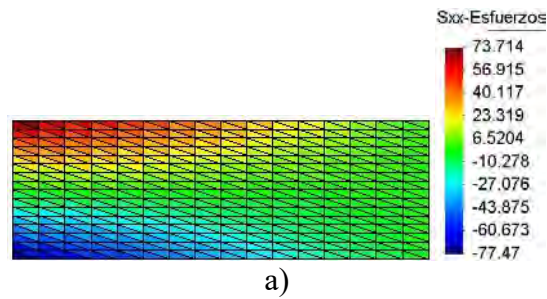


Figura 4.10 Esfuerzos σ_x de viga con 128 elementos formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ



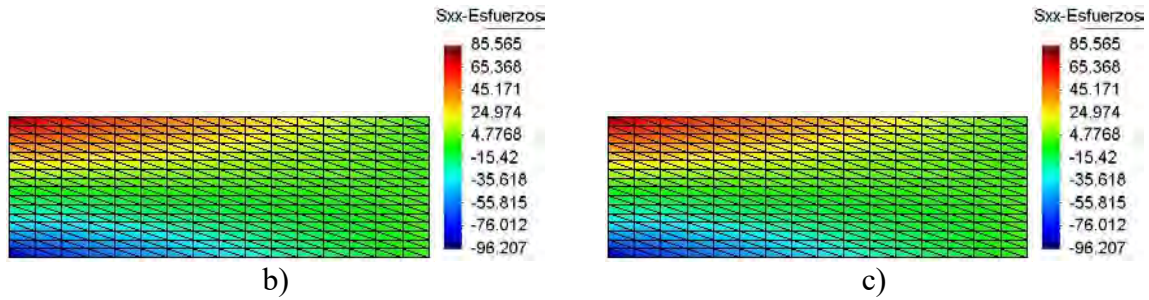


Figura 4.11 Esfuerzos σ_x de viga con 512 elementos formulación: a) u , b) u - σ y c) u - ε - σ

En las figuras 4.12 a 4.16 se muestran las comparaciones para los resultados de deformación obtenidos con la formulación estándar de desplazamientos, la formulación mixta desplazamiento-deformación y la formulación desplazamiento-deformación-esfuerzo, y donde se ve que se tiene una mejor distribución de las deformaciones en los resultados obtenidos con las formulaciones mixtas.

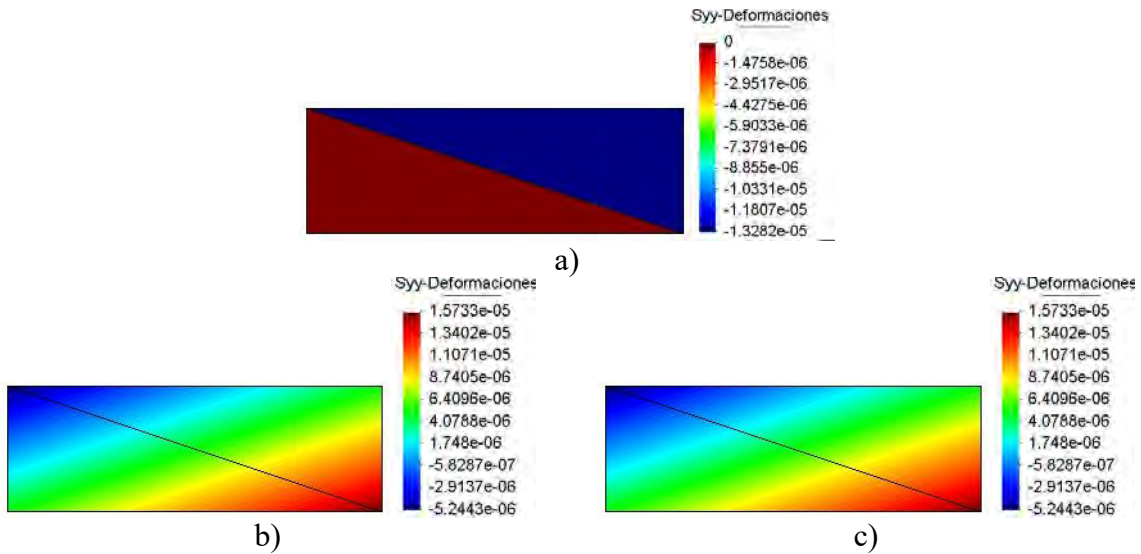
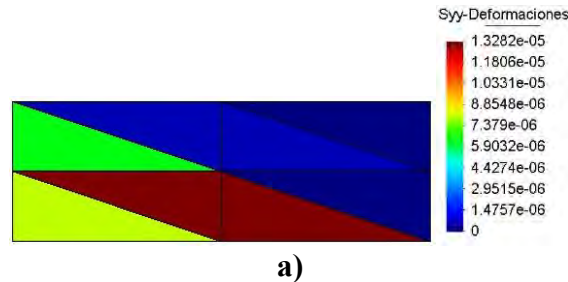


Figura 4.12 Deformaciones ε_y de viga con 2 elementos formulación: a) u , b) u - ε y c) u - ε - σ



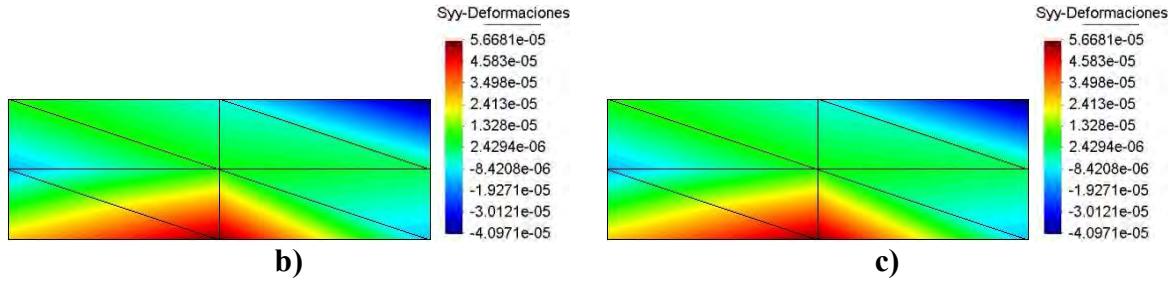


Figura 4.13 Deformaciones ε_y de viga con 8 elementos formulación: a) u, b) u-ε y c) u-ε-σ

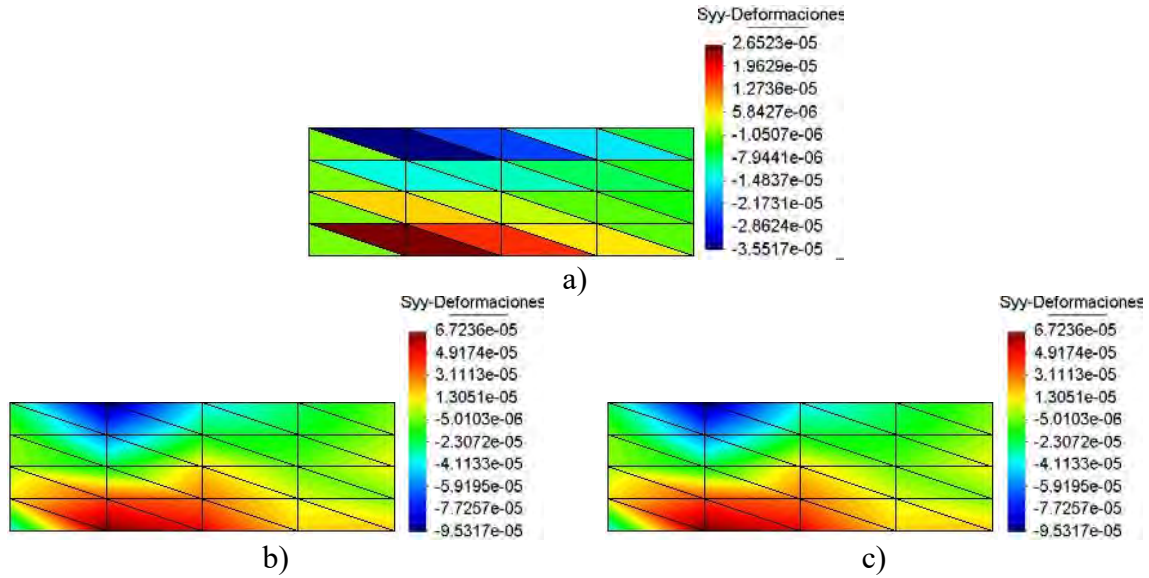


Figura 4.14 Deformaciones ε_y de viga con 32 elementos formulación: a) u, b) u-ε y c) u-ε-σ

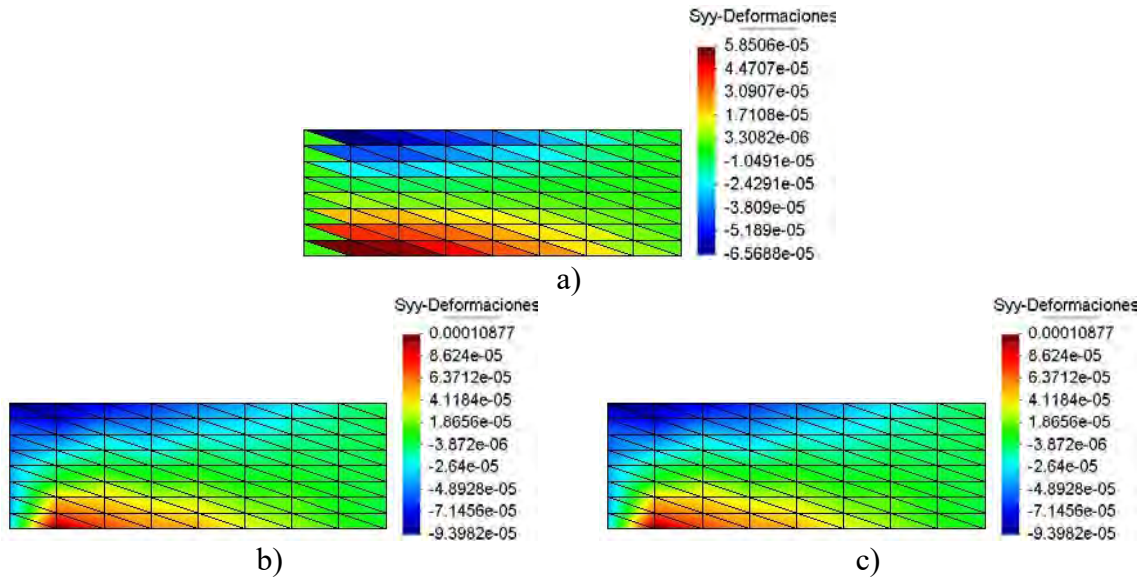


Figura 4.15 Deformaciones ε_y de viga con 128 elementos formulación: a) u, b) u-ε y c) u-ε-σ

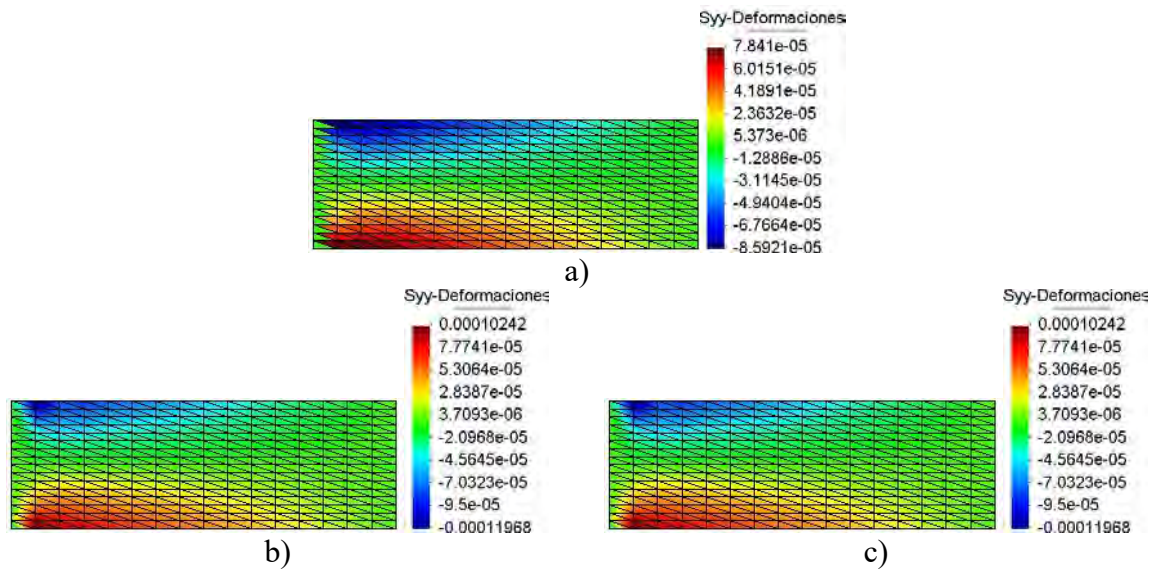


Figura 4.16 Deformaciones ε_y de viga con 512 elementos formulación: a) u, b) u-s y c) u-e-s

4.3 Placa con hueco

Este ejemplo consiste de una placa de acero de 40x50cm y espesor de 2.54cm con una perforación al centro de 20cm de diámetro, módulo de Poisson $\nu=0.3$, módulo de elasticidad $E=2,100,000 \text{ kgf/cm}^2$, sometida a una carga uniforme de $t=13,500 \text{ kgf/cm}$ que actúa sobre dos bordes opuestos como se muestra en la figura 4.17, debido a simetría se modeló un cuarto de la placa, se utilizó una malla con 320 elementos triangulares. Este ejemplo también se resolvió en el programa ANSYS para comparar los resultados. La solución exacta de este problema se tomó de Berrocal (1998).

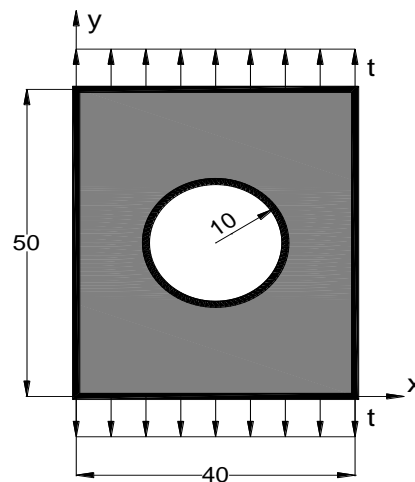


Figura 4.17 Placa con hueco

En la figura 4.18 se muestra la comparación para los resultados de desplazamientos obtenidos en centímetros con la formulación estándar de desplazamientos y la formulación mixta desplazamiento-deformación. Usando el programa ANSYS se obtuvo un desplazamiento máximo vertical en la esquina superior izquierda de $d=0.86\text{cm}$, con el programa para u , $d=0.81\text{cm}$, y para los programas de formulaciones mixtas $d=0.85$, por lo que se tiene una mejor aproximación con las formulaciones mixtas, dado que las formulaciones mixtas se aproximan en un 98.8% y la formulación estándar 94%.

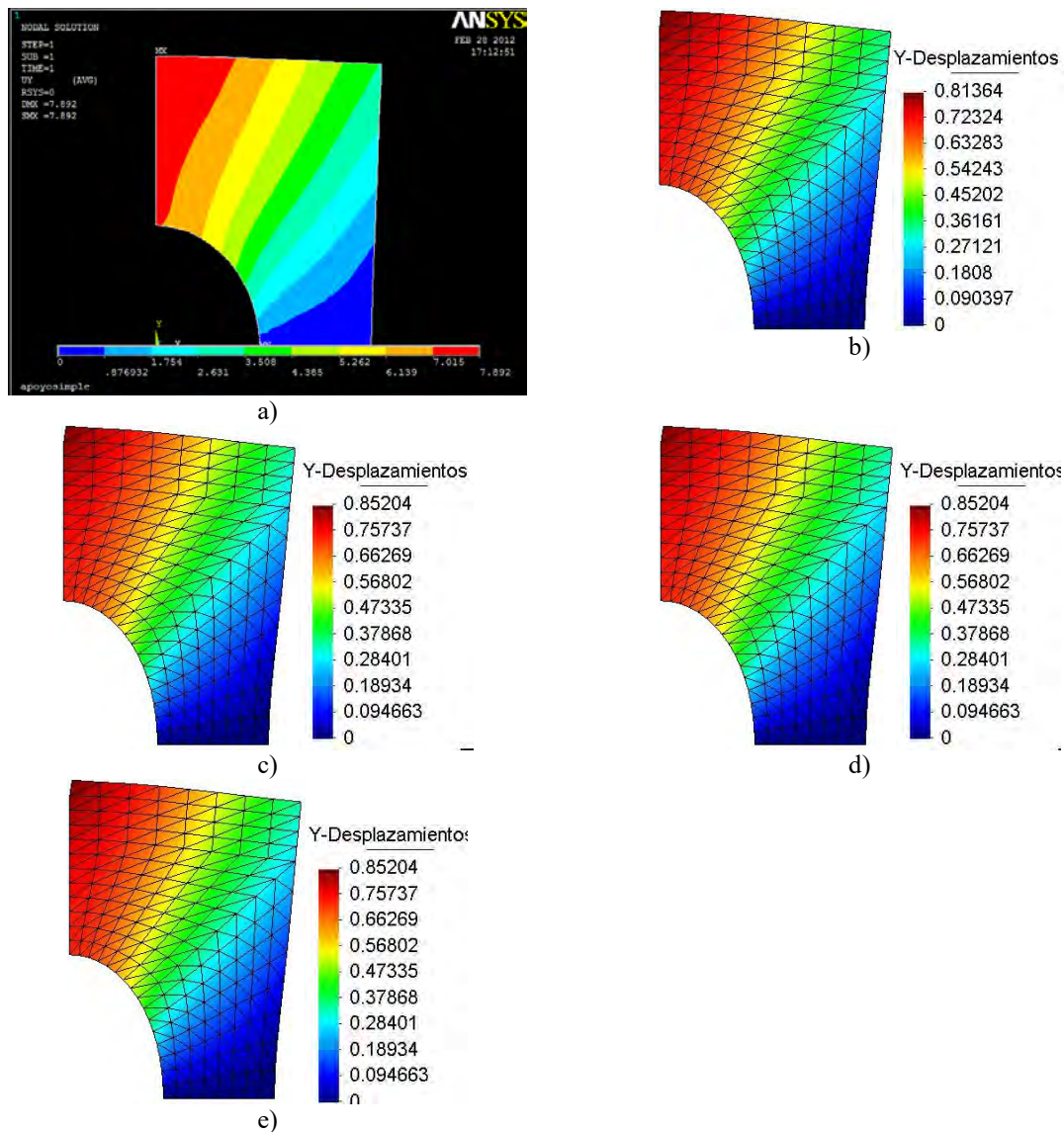


Figura 4.18 Desplazamiento vertical de placa con hueco formulación: a) ANSYS, b) u , c) $u-\epsilon$, d) $u-\sigma$ y e) $u-\epsilon-\sigma$

El esfuerzo máximo para la solución exacta se calcula como:

$$\sigma_{\max} = \frac{3 \cdot t}{8} = 5062.5 \text{ kgf/cm}^2 \quad (3.4)$$

En la figura 4.19 se muestra la comparación para los resultados de esfuerzos en kgf/cm^2 obtenidos con la formulación estándar de desplazamientos y la formulación mixta $u-\sigma$ y $u-\varepsilon-\sigma$, y donde se observa que la formulación mixta tiene una mejor aproximación.

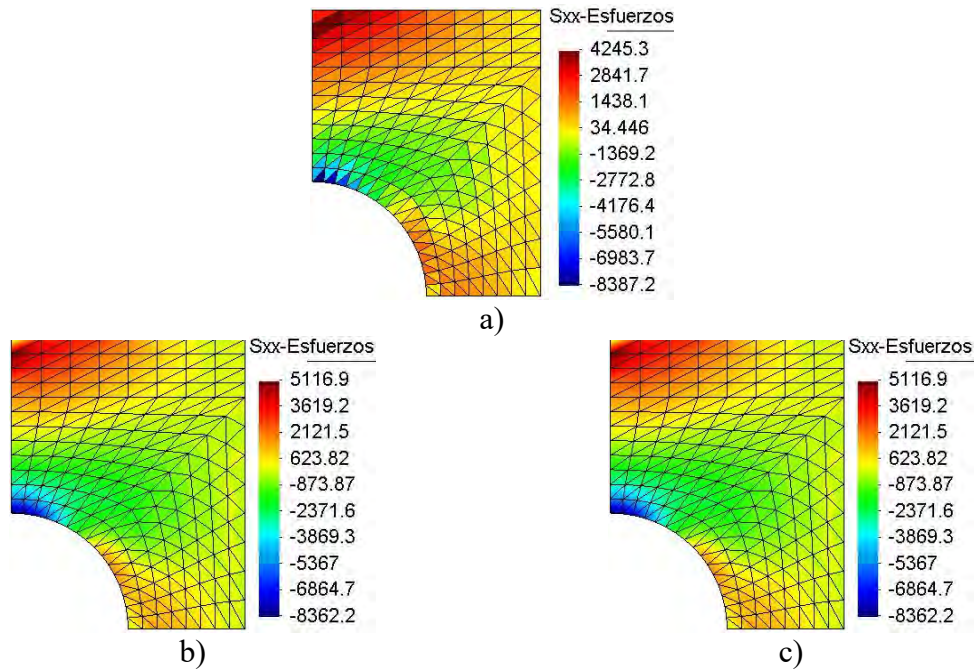


Figura 4.19 Esfuerzos σ_x de placa con hueco formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$

En la figura 4.20 se muestra la comparación para los resultados de deformaciones obtenidos con la formulación estándar u y las formulaciones mixtas $u-\varepsilon$ y $u-\varepsilon-\sigma$.

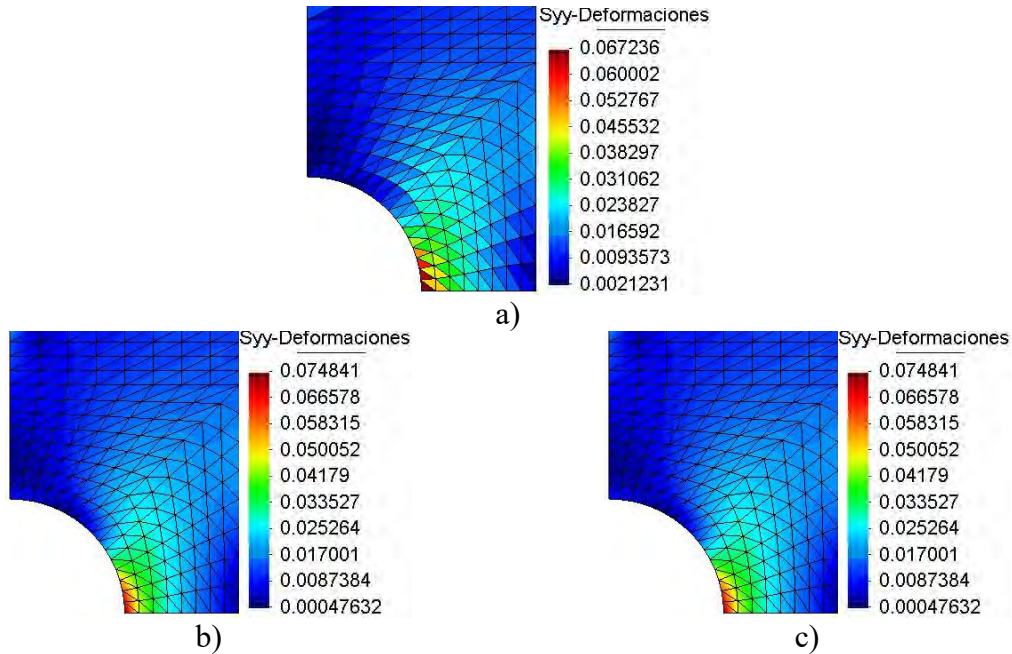
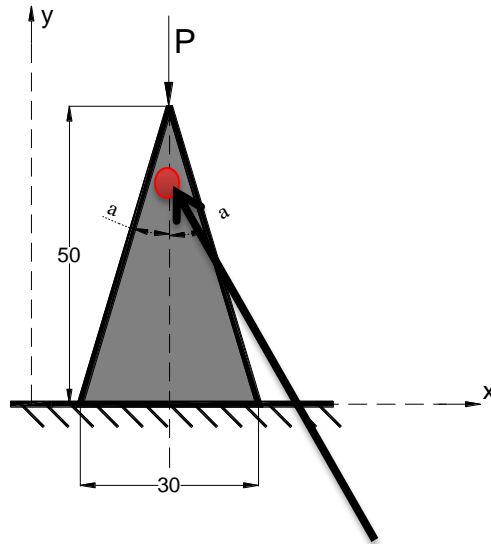


Figura 4.20 Deformaciones ε_y de placa con hueco formulación: a) u , b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$

4.4 Cuña de concreto

El siguiente ejemplo consiste de una cuña de concreto empotrada en la base, la cual tiene 30cm de base y 50cm de altura, la cuña está cargada con una fuerza vertical de $P=10,000$ kg en su arista como se muestra en la figura 4.21, se utilizó una malla compuesta por 54 elementos triangulares, módulo de Poisson $\nu=0.2$ y módulo de elasticidad $E=221,359$ kgf/cm².



Se calculó σ_p en ese punto

Figura 4.21 Cuña de concreto

Para la solución exacta se tiene un valor de esfuerzo $\sigma_p=-12.005$, calculado a 10cm de la parte superior de la cuña como se muestra en la figura 4.21, el esfuerzo σ_p se calcula como:

$$\sigma_p := \frac{2 \cdot P}{2 \cdot \alpha + \sin(2 \cdot \alpha)} \cdot \frac{\cos(\theta)}{\rho} = -12.005 \quad \text{kgf/cm}^2$$

Esfuerzo σ_p obtenido con el programa de desplazamientos u , $\sigma_p=-12.82$ kgf/cm² 6.8% mayor a la solución exacta y con los programas $u-\sigma$ y $u-\epsilon-\sigma$, $\sigma_p=-12.41$ kgf/cm² el cual es 3.4% mayor que la solución exacta por lo que la formulación mixta tiene una mejor aproximación que la formulación estándar. En la figura 4.22 se muestran los desplazamientos en centímetros en la dirección y .

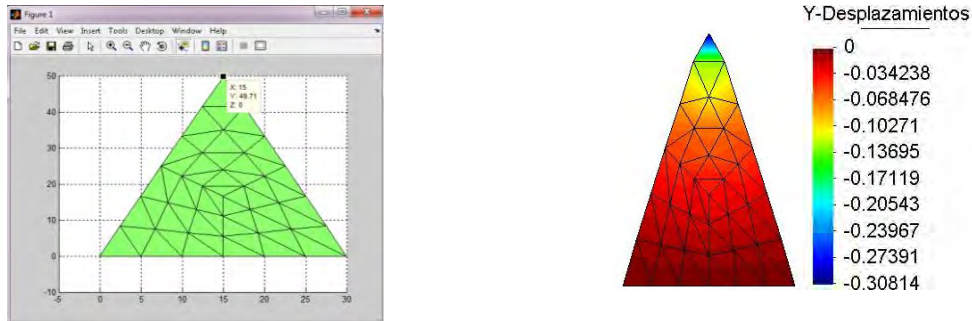


Figura 4.22 Desplazamientos verticales cuña de concreto

En la figura 4.23 se muestra la comparación para los resultados de esfuerzos en kgf/cm^2 obtenidos con la formulación estándar de desplazamientos, la formulación mixta desplazamiento-esfuerzo y desplazamiento-deformación-esfuerzo, teniéndose con la formulación mixta una aproximación más cercana a la solución exacta en 50% con respecto a la formulación estándar.

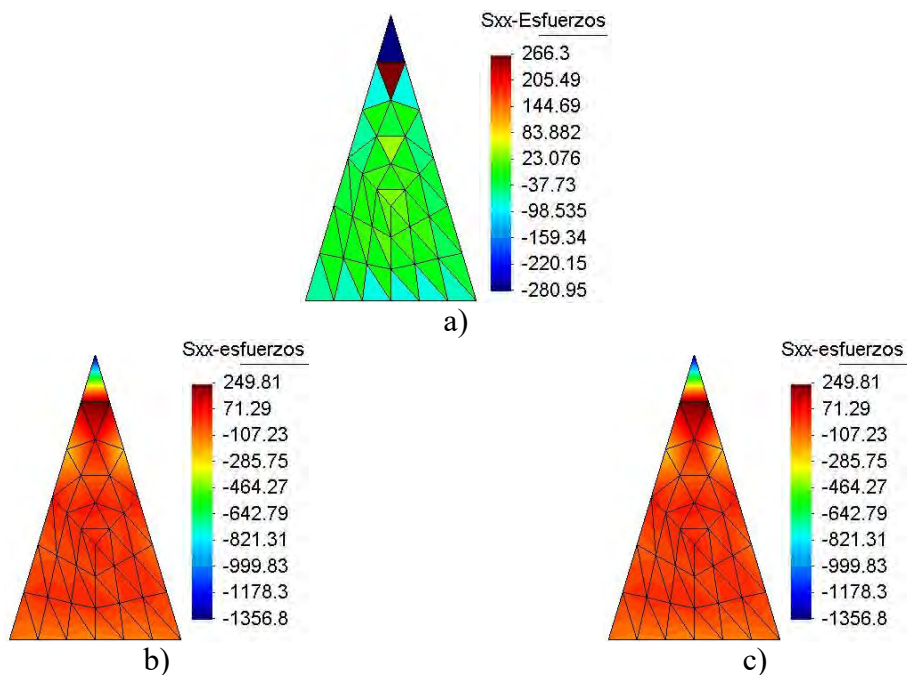


Figura 4.23 Esfuerzos σ_x de cuña de concreto formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

En la figura 4.24 se muestra la comparación para los resultados de deformaciones obtenidos con la formulación estándar de desplazamientos y la formulación mixta desplazamiento-esfuerzo, con una mejor aproximación a la solución exacta con las formulaciones mixtas u- σ y u- ϵ - σ , ya que la formulación estándar de desplazamientos excede en 6.8% el valor de la solución exacta en comparación con el 3.4% que se excede con las formulaciones mixtas u- σ y u- ϵ - σ .

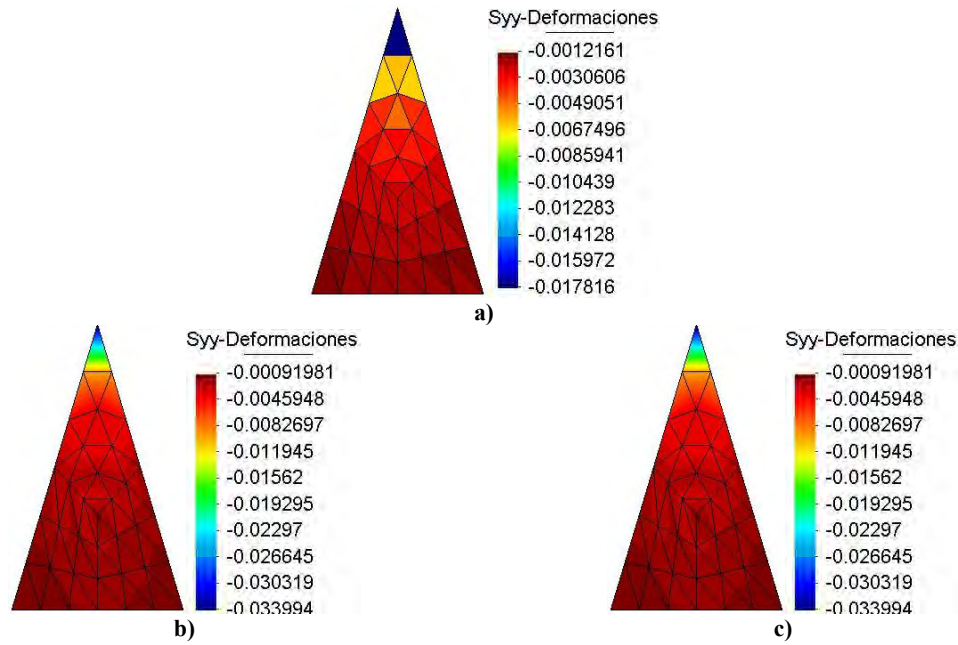


Figura 4.24 Deformaciones de cuña de concreto formulación: a) u, b) u-s y c) u-e-s

4.5 Prueba de la parcela

Se revisó que los elementos pasaran la prueba de la parcela, la cual sirve para verificar la correcta implementación de la formulación de elementos finitos, donde a todos los nodos de borde se les aplicó una fuerza de tensión horizontal, la fuerza neta aplicada fue de $t=100\text{kgf/m}$ y restringido en el borde izquierdo, las dimensiones del parche son de $10 \times 10\text{cm}$ y con una malla de 64 elementos triangulares, módulo de Poisson $\nu=0.2$, módulo de elasticidad $E=1,000\text{ kgf/cm}^2$ y se analizó para esfuerzo plano. Como comprobación se revisó que se tuvieran desplazamientos uniformes a todo lo largo del elemento. La satisfacción de la prueba de la parcela proporciona una condición suficiente de convergencia del elemento y verifica que la programación ha sido correcta, (Zienkiewicz y Taylor, 1994).

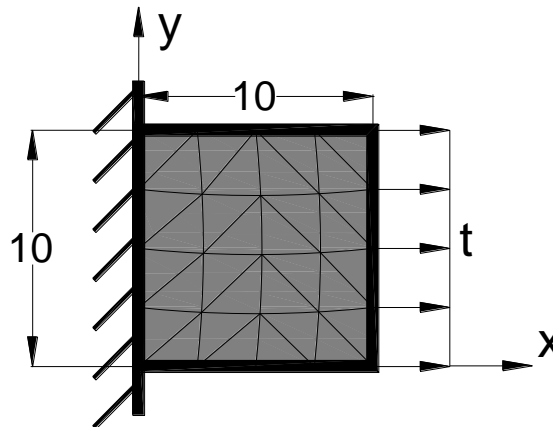


Figura 4.25 Prueba de la parcela

En la figura 4.26 se muestran los desplazamientos horizontales en centímetros, los cuales en todas las formulaciones utilizadas en este trabajo se tiene una distribución uniforme de las deformaciones con lo que se comprueba que la programación ha sido correcta.

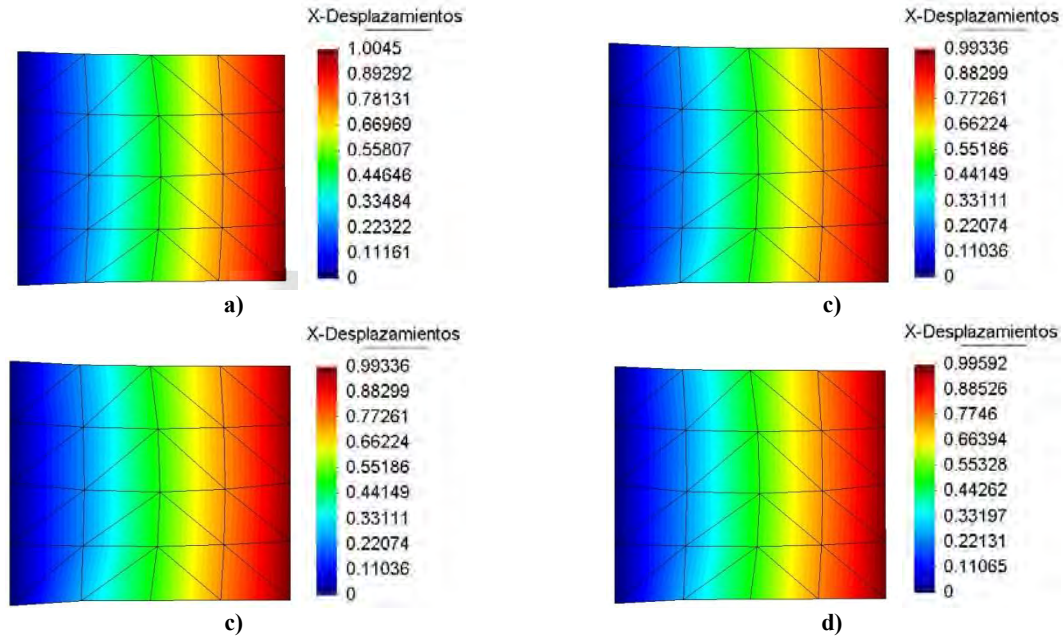
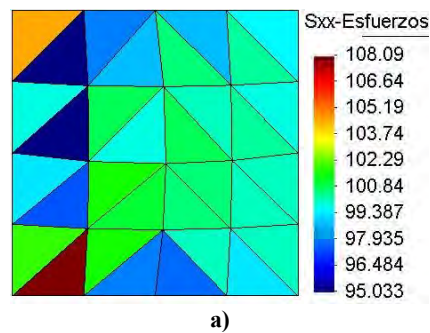


Figura 4.26 Desplazamiento horizontal de la parcela formulación: a) u, b) u- ϵ , c) u- σ y d) u- ϵ - σ

En la figura 4.27 se muestra la comparación de esfuerzos σ_x en kgf/cm^2 entre la formulación estándar de desplazamientos y las formulaciones mixtas, donde se tiene una mejor distribución de esfuerzos en las formulaciones mixtas u- σ y u- ϵ - σ , mostrando la variación de esfuerzo en cada elemento, a diferencia de la formulación estándar u, la cual presenta esfuerzos constantes para cada elemento.



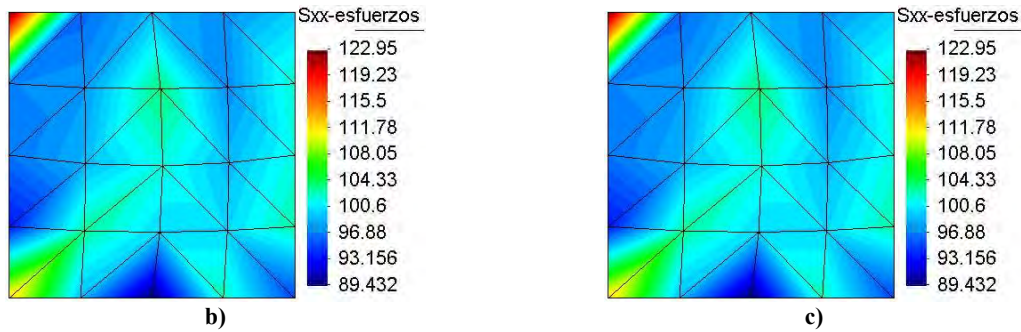


Figura 4.27 Esfuerzos σ_x de la prueba de la parcela formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

En la figura 4.28 se tienen graficados las deformaciones horizontales ϵ_x , en las que observa la mejora de los resultados con el uso de las formulaciones mixtas ya que se obtienen mejores distribuciones de las deformaciones en cada elemento en comparación con la formulación estándar donde se obtiene un valor constante de deformación para cada elemento.

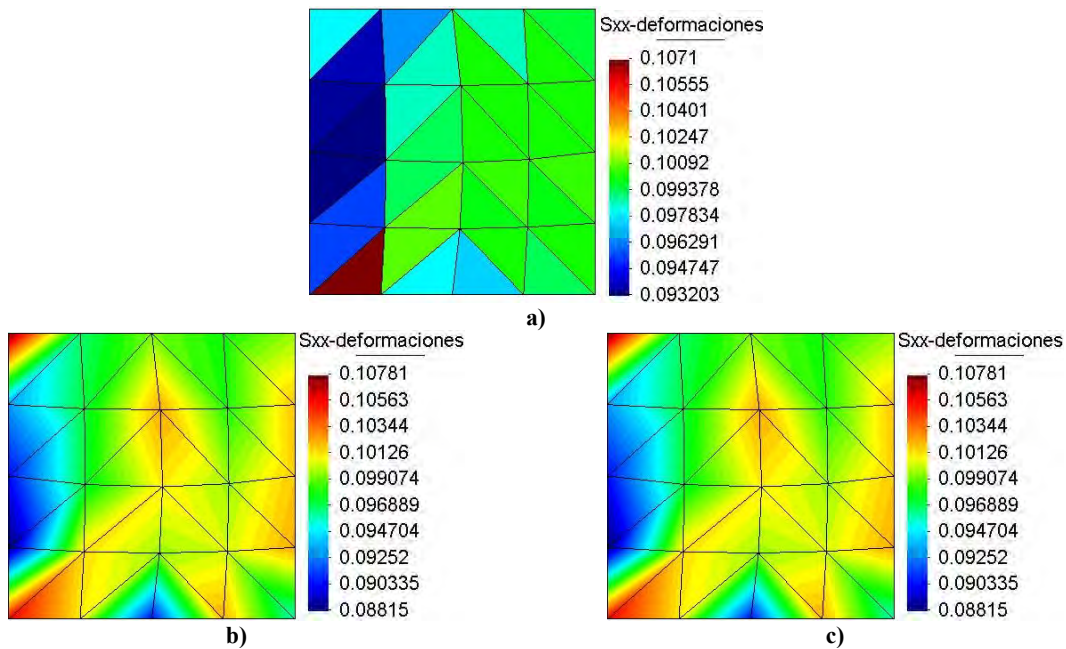


Figura 4.28 Deformaciones ϵ_x de la prueba del parche formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

4.6 Disco

El siguiente problema consiste en un disco circular de 2 metros de diámetro y espesor unitario, módulo de Poisson $\nu=0.25$, módulo de elasticidad $E=10,000 \text{ kgf/cm}^2$, al cual se le aplican dos cargas concentradas $P=1,000\text{kg}$ como se muestra en la figura 4.29, debido a su simetría solo se modelo un cuarto del disco con una malla de 150 elementos, el desplazamiento vertical máximo obtenido en el manual de FEAP (Taylor 2008) es de $d=0.00224\text{cm}$, mientras que con el programa desarrollado de elementos finitos con aproximación de desplazamientos $d=0.0023176\text{cm}$.

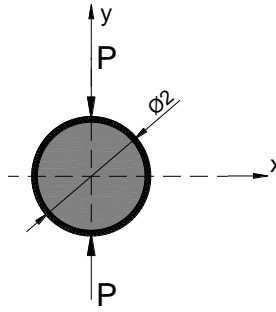


Figura 4.29 Disco

Los desplazamientos verticales en centímetros se muestran en la figura 4.30 teniendo una mejor aproximación con la formulación estándar al resultado obtenido en el manual FEAP, el resultado de la formulación estándar es 3.5% mayor a la solución exacta y con las formulaciones mixtas es 32% mayor.

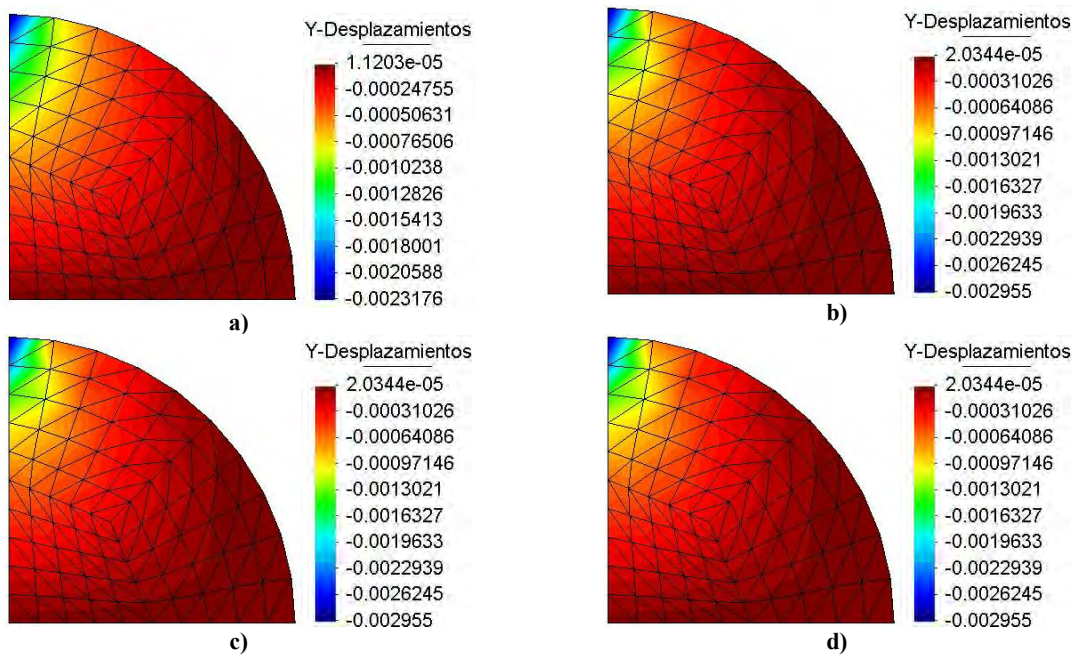


Figura 4.30 Desplazamientos de disco formulación: a) u, b) u-σ y c) u-ε-σ

La distribución de deformaciones y esfuerzos es mejor con las formulaciones mixtas como se muestra en la 4.31 y 4.32, debido a que la distribución de esfuerzos en la aproximación mixta varía linealmente dentro de cada elemento y son continuos entre elementos vecinos, mientras que en la aproximación de desplazamientos los esfuerzos son constantes dentro de cada elemento y son discontinuos entre elementos vecinos.

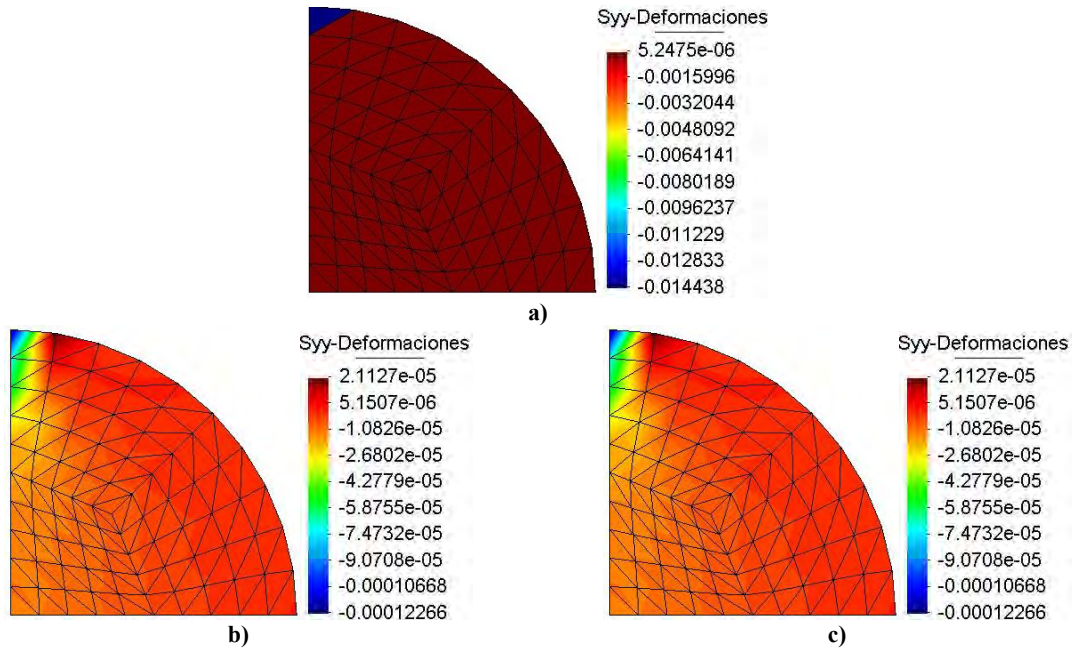


Figura 4.31 Deformaciones ε_y de disco formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$

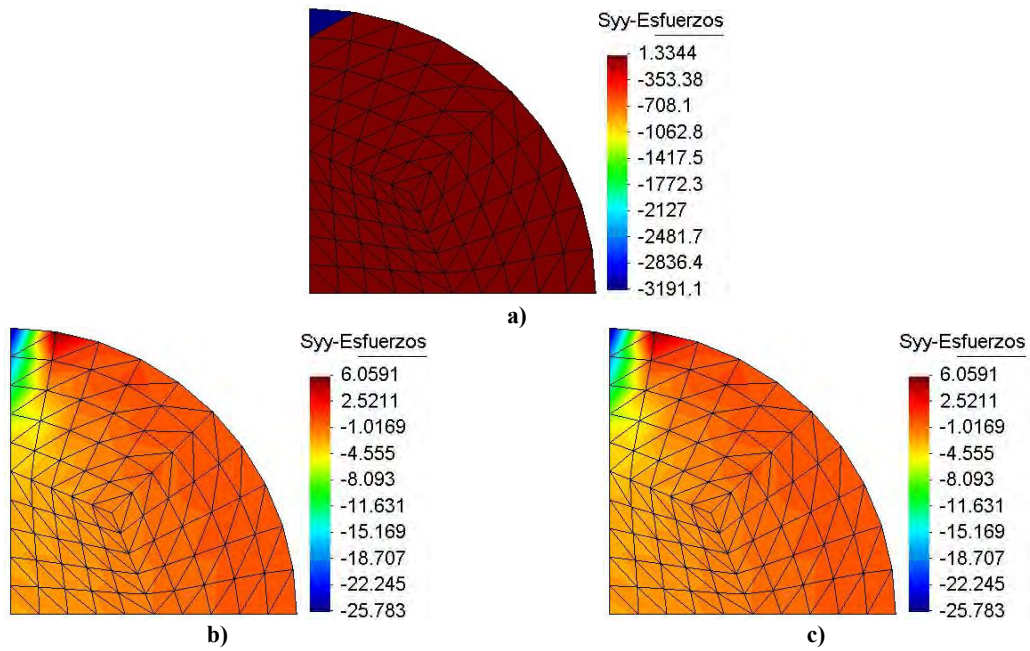


Figura 4.32 Esfuerzos de disco formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$

4.7 Placa con perforación y corte

Este ejemplo consiste de una placa de acero con dimensiones de 40cm de base y 50cm de altura con espesor de 2.54cm, módulo de Poisson $\nu=0.3$ y módulo de elasticidad $E=2,100,000 \text{ kgf/cm}^2$; la placa tiene una perforación circular al centro de 10cm de diámetro y un corte en la parte central derecha. La placa está sometida a fuerzas de tensión $t=80,000 \text{ kgf/m}$ en sus bordes superior e inferior, como se muestra en la figura 4.33, debido a simetría se modela la mitad de la placa.

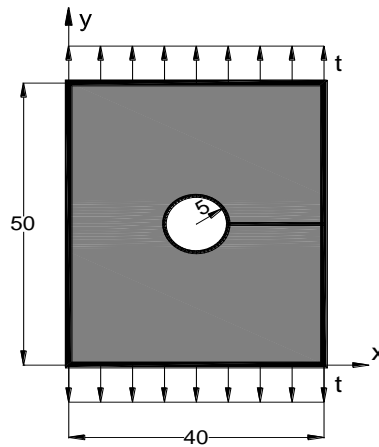
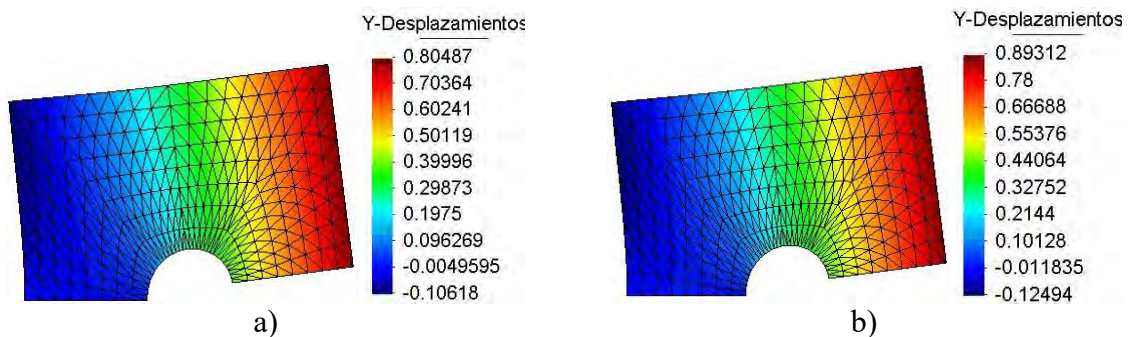


Figura 4.33 Placa con perforación y corte

En el análisis realizado en el programa ANSYS se obtuvo un valor máximo de desplazamiento vertical en la esquina superior derecha de $d=0.8048 \text{ cm}$, y con el programa desarrollado de elementos finitos se obtuvo un desplazamiento máximo de $d=0.80487 \text{ cm}$ lo cual muestra una buena aproximación que se obtiene con los programas desarrollados de elementos finitos, en la figura 4.34 se muestran los desplazamientos verticales obtenidos con las diferentes formulaciones.



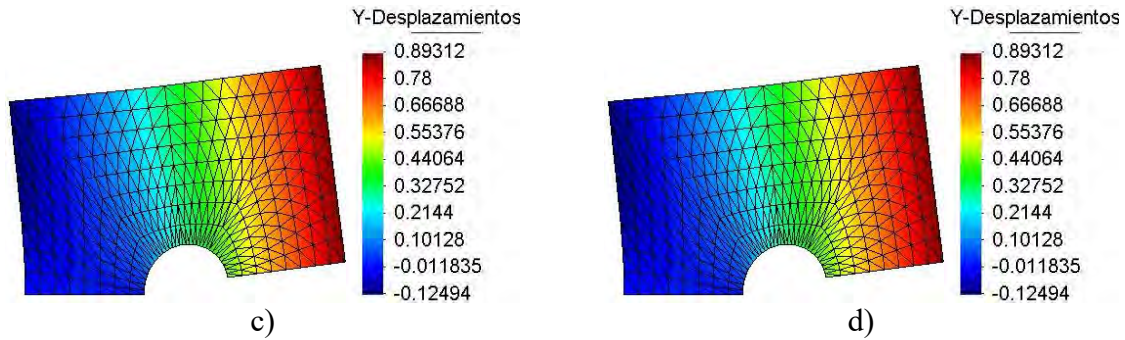


Figura 4.34. Desplazamientos de placa formulación: a) u, b) u- σ , c) u- ϵ y d) u- ϵ - σ

En las figuras 4.35 y 4.36 se muestran los valores de deformación y esfuerzo respectivamente, los esfuerzos están dados en kgf/cm^2 , para las cuatro formulaciones de elementos finitos utilizadas en este trabajo.

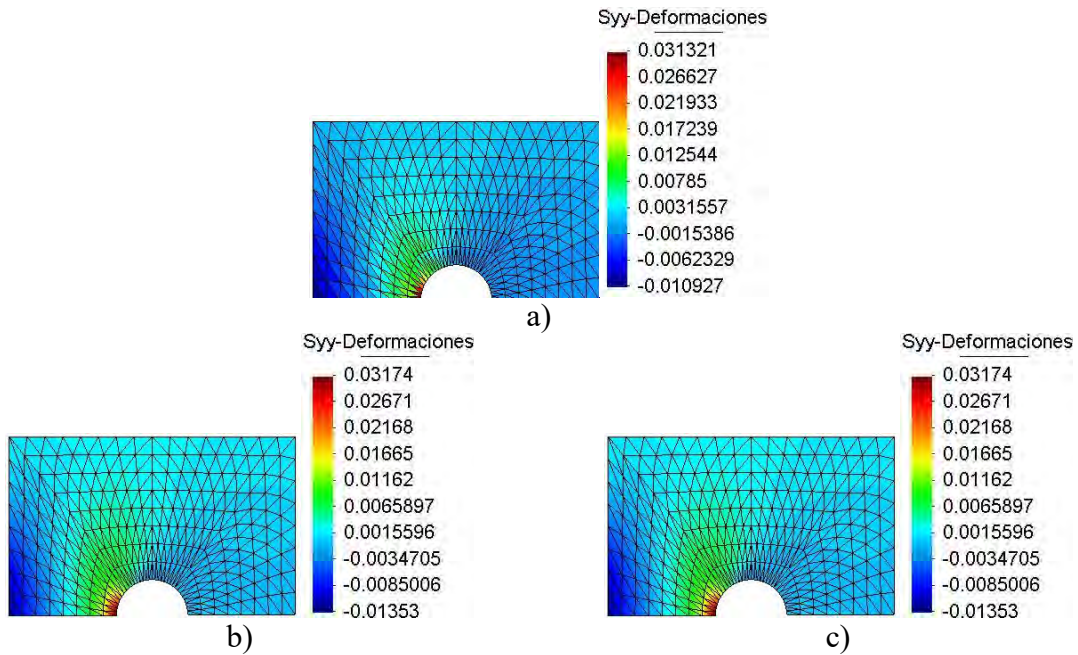
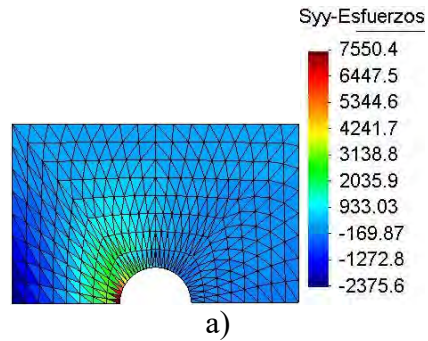


Figura 4.35 Deformaciones ϵ_y de placa formulación: a) u, b) u- ϵ y c) u- ϵ - σ



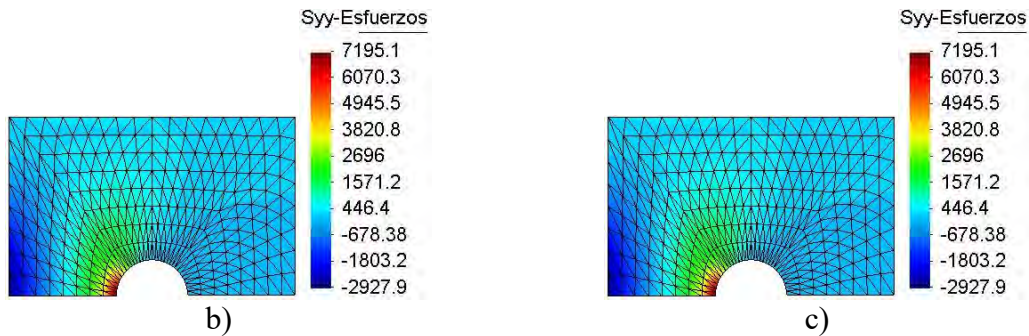


Figura 4.36 Esfuerzos σ_y de placa formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

4.8 Membrana de Cook

Este ejemplo corresponde a la denominada membrana de Cook, la cual presenta el problema de atoramiento de desplazamientos. En la figura 4.37 se muestra la geometría y condiciones de contorno del problema, además de las mallas utilizadas, el valor de la carga P sobre el elemento es $P=10,000\text{N}$. Las propiedades mecánicas del material son $E=1,000\text{ N/mm}^2$ y relación de Poisson $\nu=0.4999$. Este problema se utilizó para evaluar la posibilidad de bloqueo, los cuales se espera se solucionen con las formulaciones mixtas. En la solución de este problema se utilizaron mallas triangulares estructuradas con 2, 8, 128, 512 y 2048 elementos mostradas en la figura 4.38, en las que se evalúa la convergencia de las formulaciones mixtas en comparación con la formulación de desplazamientos.

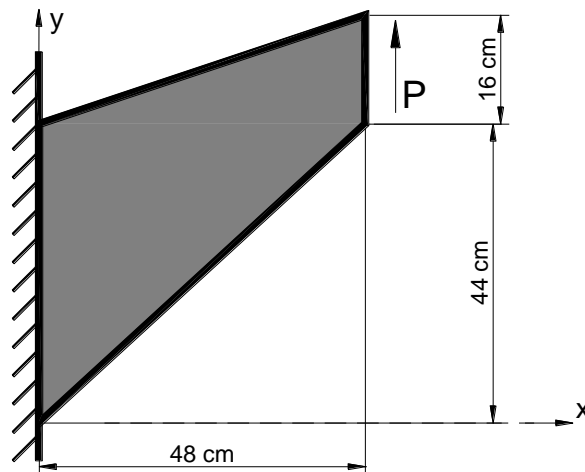


Figura 4.37 Membrana de Cook



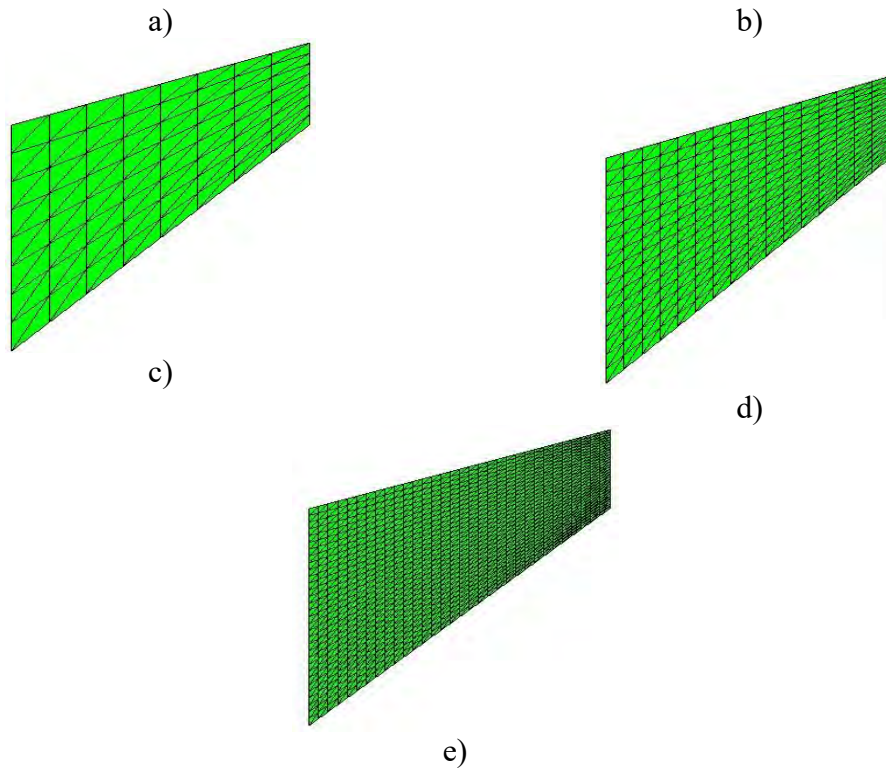


Figura 4.38 Mallado de membrana con: a) 2, b) 8, c) 128, d) 512 y e) 2048 elementos.

En la figura 4.39 se muestra la gráfica de desplazamientos máximos para las cuatro formulaciones implementadas, como se esperaba el problema del bloqueo se presentó en la formulación estándar de desplazamientos, ya que al aplicar la carga los elementos prácticamente no se desplazan, usando las formulaciones mixtas este problema se supera dando una mejor solución, en particular cuando se hace uso de la formulación mixta de tres variables $u-\epsilon-\sigma$ se obtiene una mejor solución numérica comparada con la solución exacta dado que para la solución con 128 elementos la aproximación con la formulación $u-\epsilon-\sigma$ se acerca a la solución exacta en un 98.5%, las formulaciones mixtas $u-\epsilon$, $u-\sigma$ con ese mismo número de elementos se acerca en un 85%.

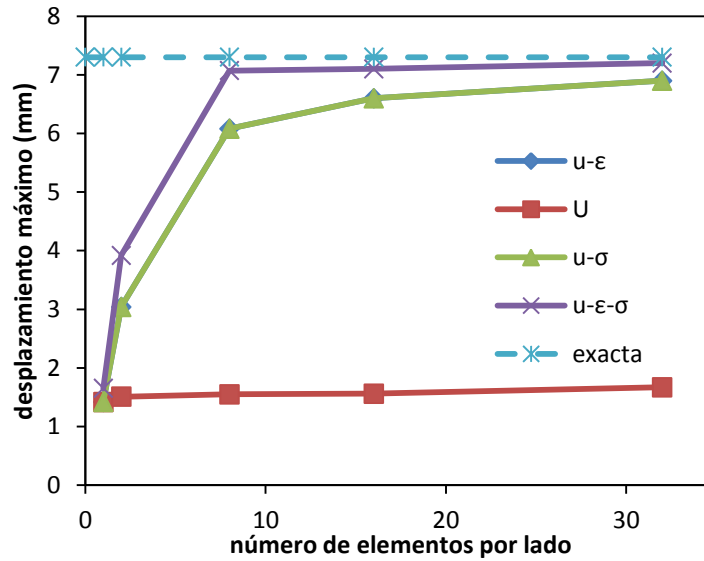


Figura 4.39 Desplazamientos máximos de todas las mallas

De la figura 4.40 a 4.44 se muestran los valores de desplazamiento vertical para todas las mallas utilizadas para todos los programas implementados, siendo las formulaciones mixtas $u-\sigma$, $u-\epsilon$ y $u-\epsilon-\sigma$ las que dan mejores resultados en comparación a la formulación estándar u , la cual tiene el problema de bloqueo.

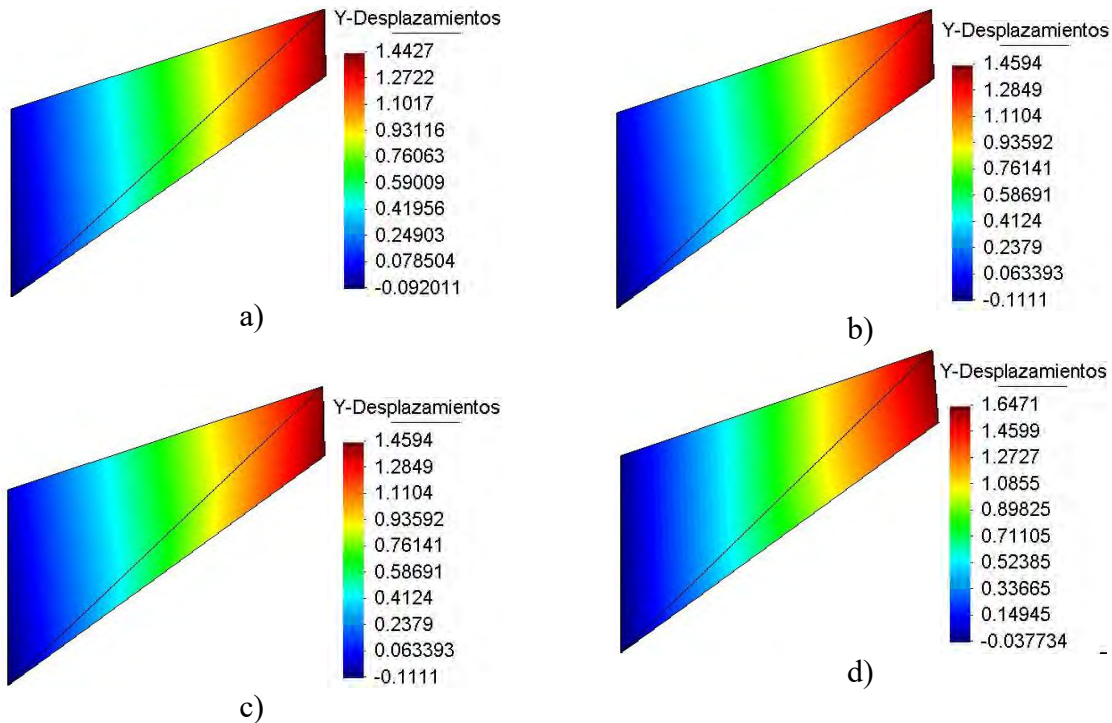


Figura 4.40 Desplazamientos verticales con 2 elementos formulación: a) u , b) $u-\sigma$, c) $u-\epsilon$ y d) $u-\epsilon-\sigma$

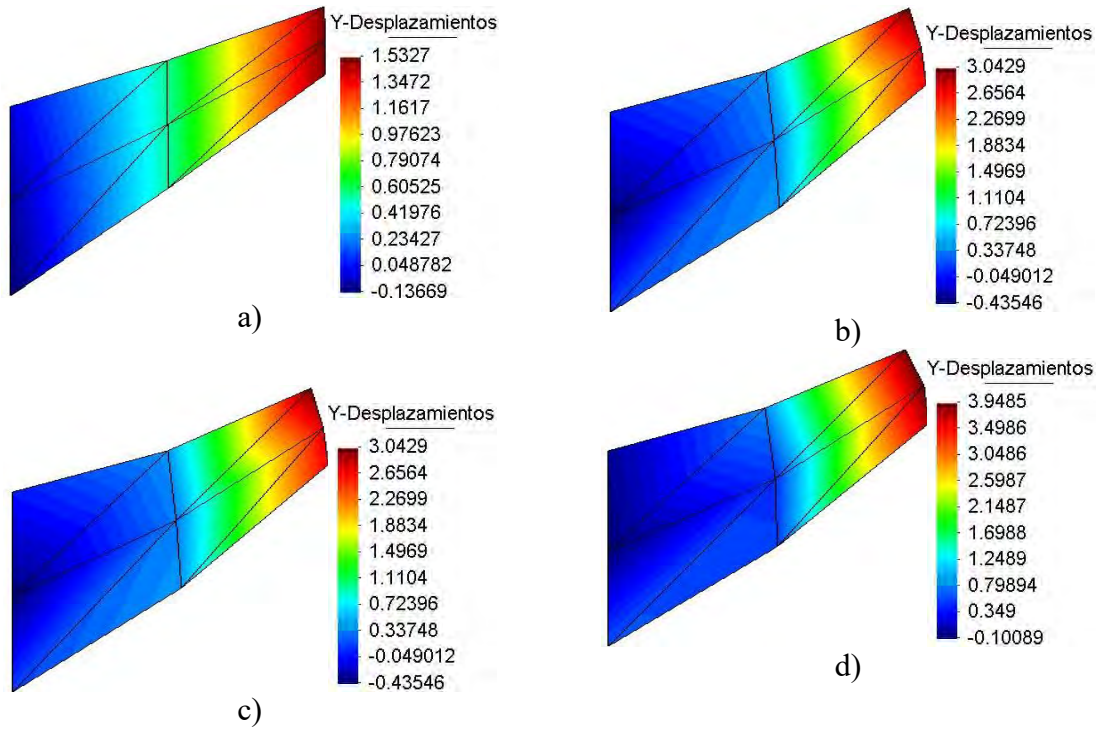


Figura 4.41 Desplazamientos verticales con 8 elementos formulación: a) u, b) u- σ , c) u- ϵ y d) u- ϵ - σ

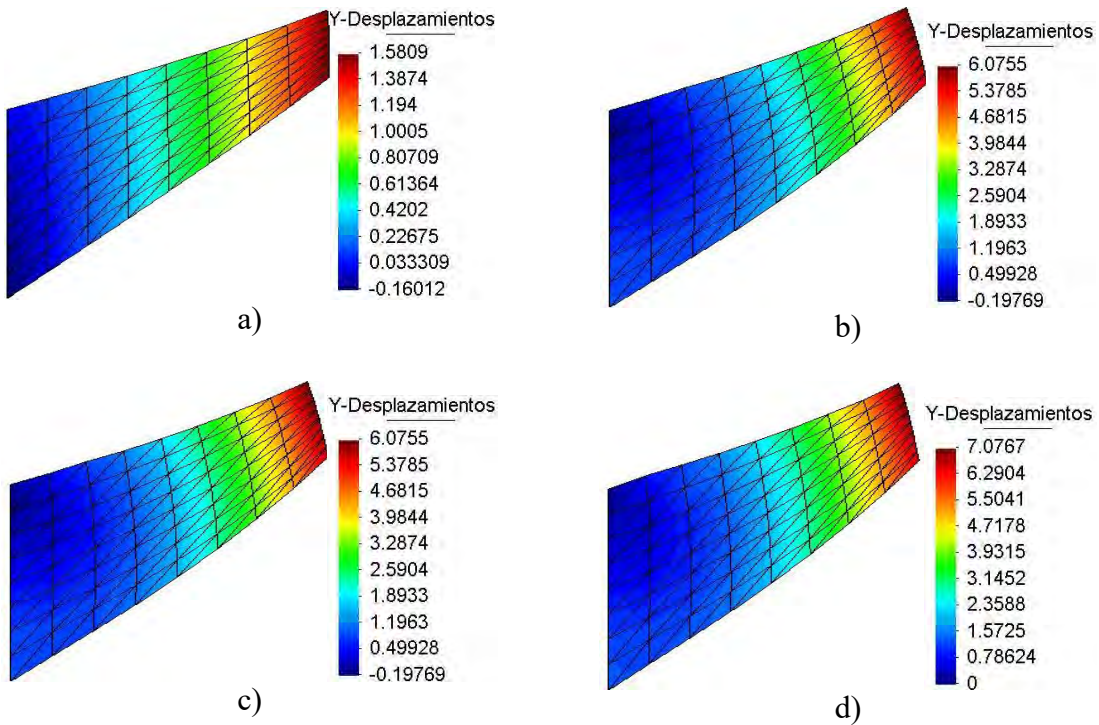


Figura 4.42 Desplazamientos verticales con 128 elementos formulación: a) u, b) u- σ , c) u- ϵ y d) u- ϵ - σ

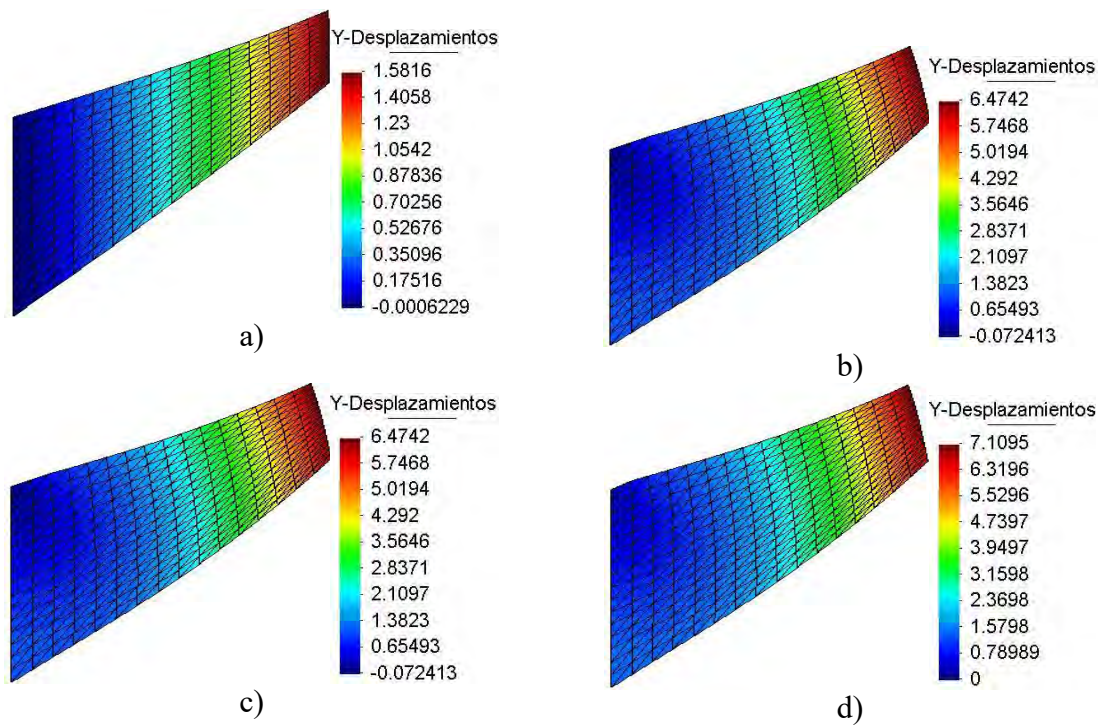


Figura 4.43 Desplazamientos verticales con 512 elementos formulación: a) u, b) u- σ , c) u- ϵ y d) u- ϵ - σ

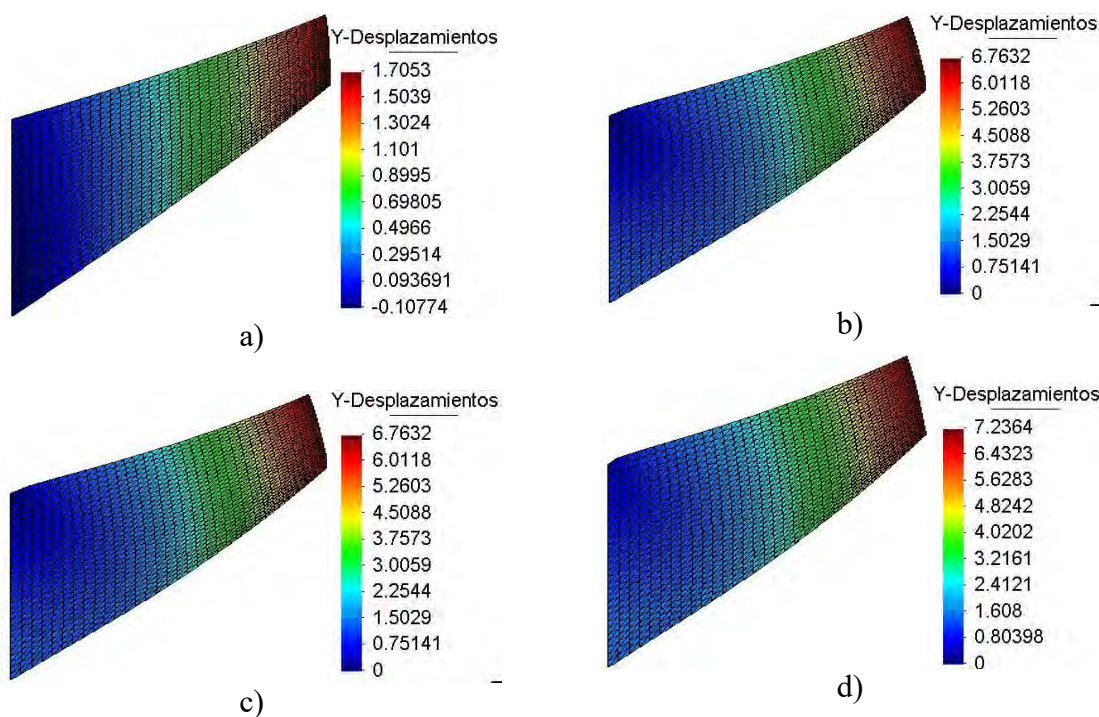


Figura 4.44 Desplazamientos verticales con 2048 elementos formulación: a) u, b) u- σ , c) u- ϵ y d) u- ϵ - σ

Las figuras 4.45 a 4.49 muestran los valores de esfuerzos σ_y , donde se tienen magnitudes bajas en la formulación estándar de desplazamientos debido al problema de bloqueo que este presenta.

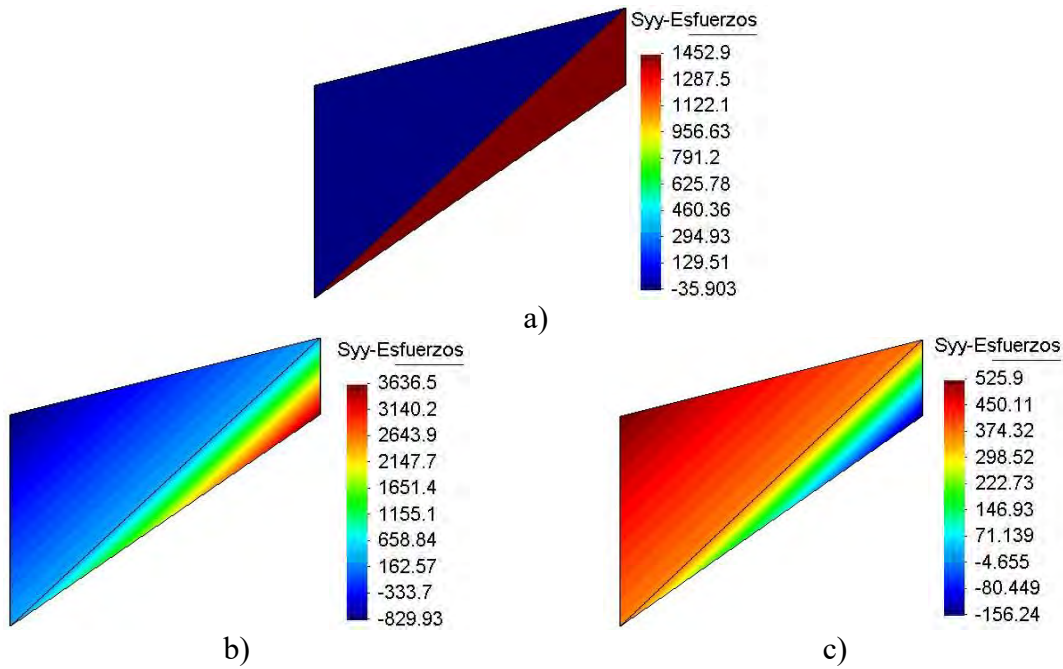


Figura 4.45 Esfuerzos σ_y con 2 elementos formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

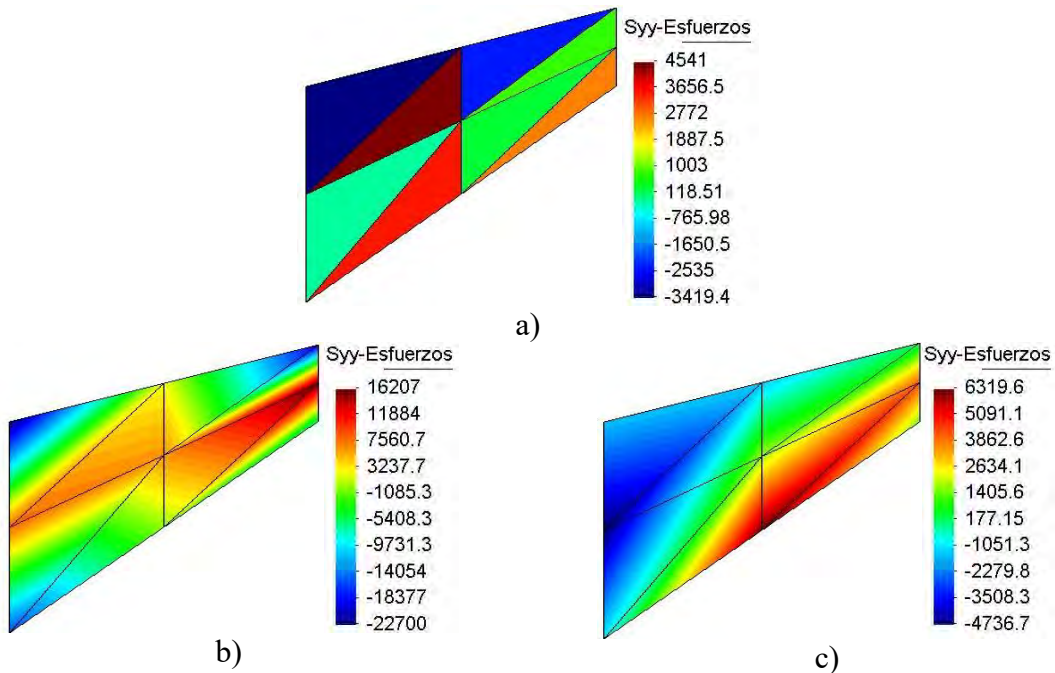


Figura 4.46 Esfuerzos σ_y con 8 elementos formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

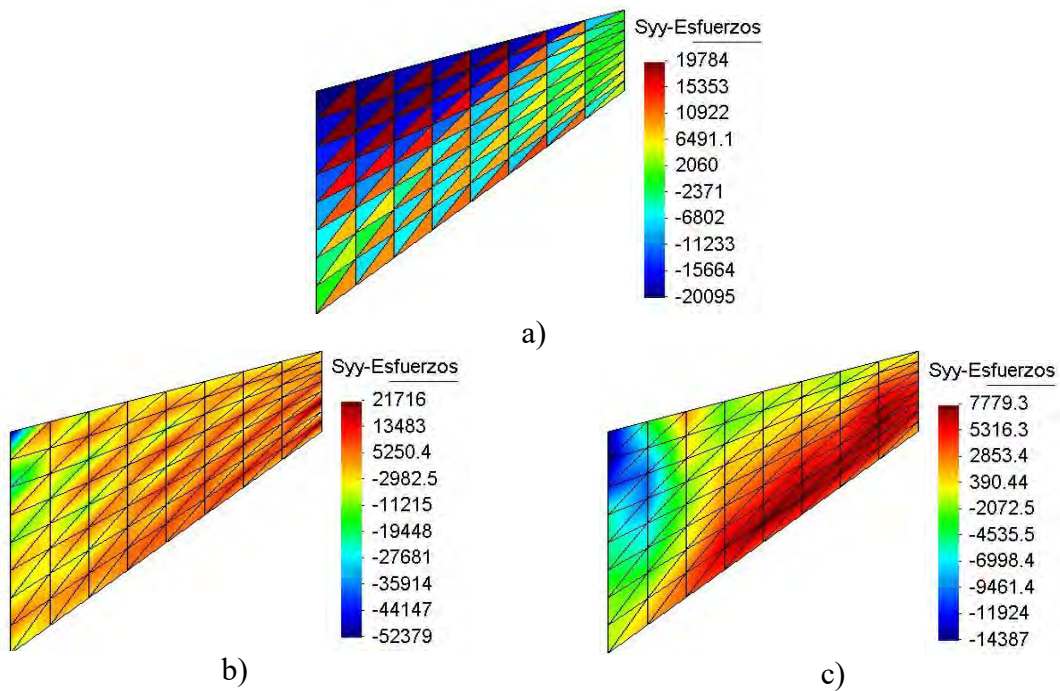


Figura 4.47 Esfuerzos σ_y con 128 elementos formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ε - σ

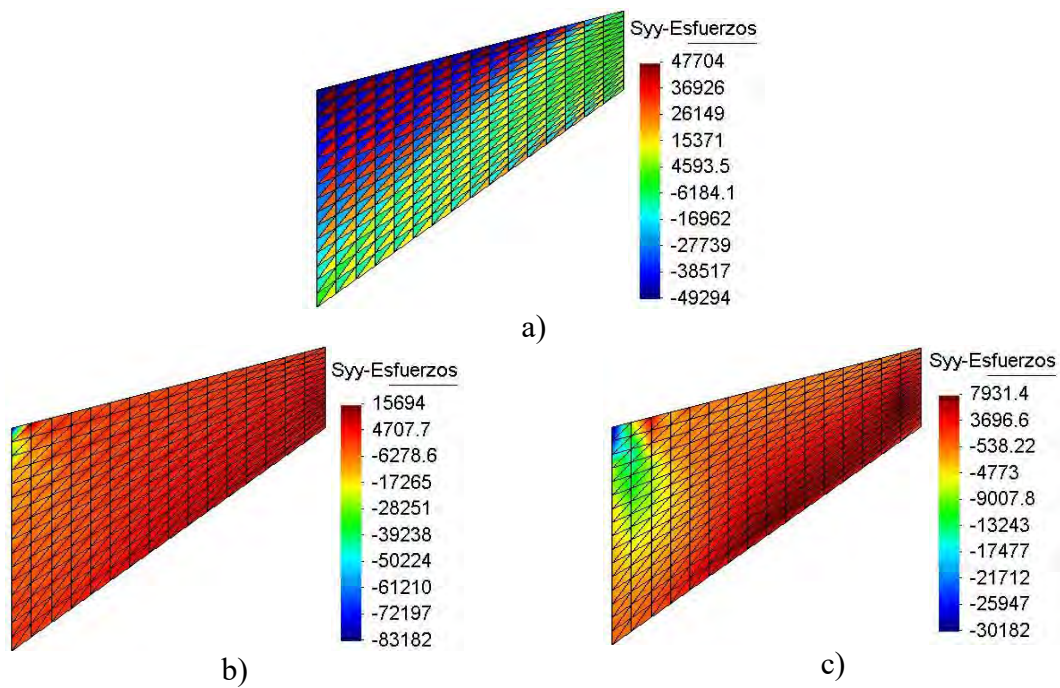


Figura 4.48 Esfuerzos σ_y con 512 elementos formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ε - σ

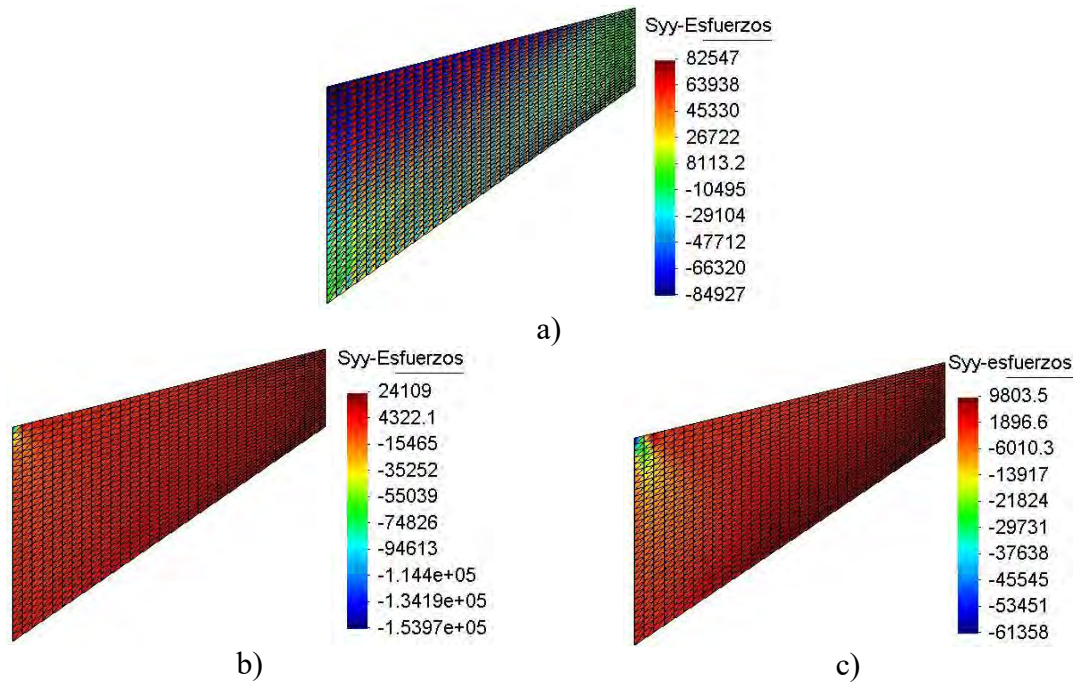


Figura 4.49 Esfuerzos σ_y con 2048 elementos formulaci3n: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

Las deformaciones ϵ_y tienen una mejor distribuci3n en cada elemento con las formulaciones mixtas que las obtenidas con la formulaci3n est3ndar de desplazamientos, la cual presenta problema de bloqueo como se muestra en la figura 4.50 a 4.54.

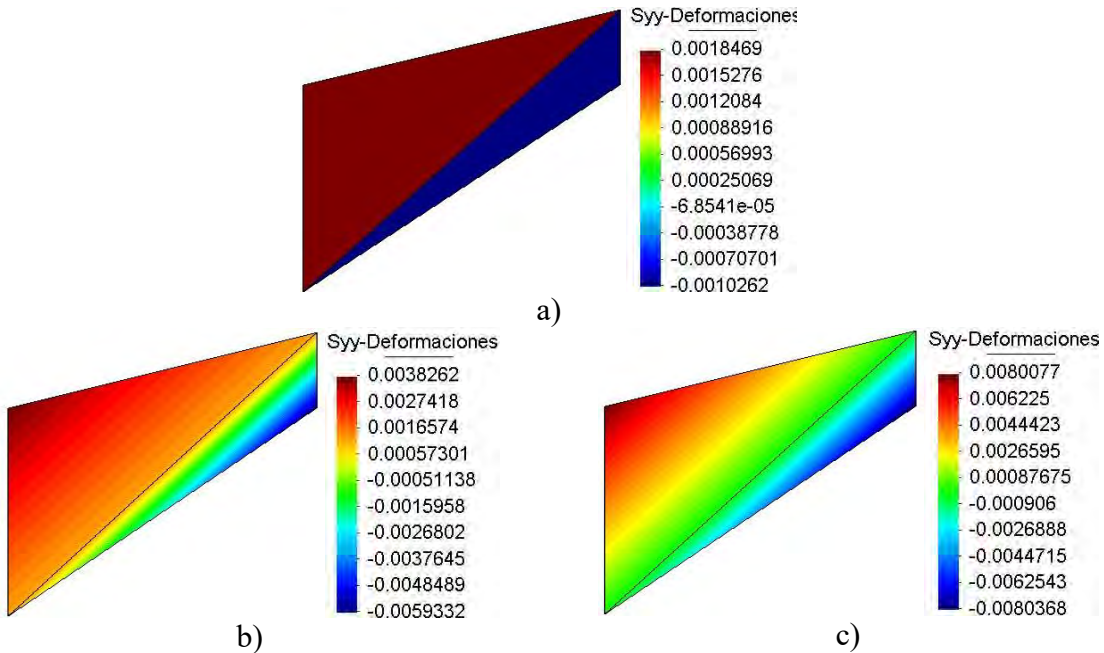


Figura 4.50 Deformaciones ϵ_y con 2 elementos formulaci3n: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ

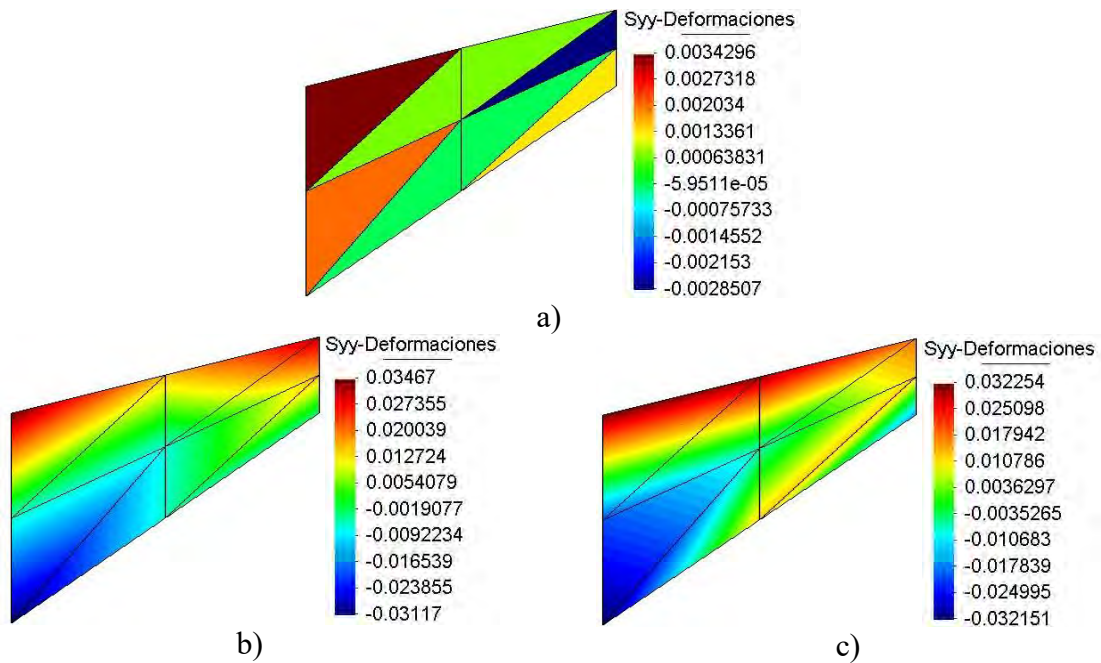


Figura 4.51 Deformaciones ε_y con 8 elementos formulación: a) u, b) u- ε y c) u- ε - σ

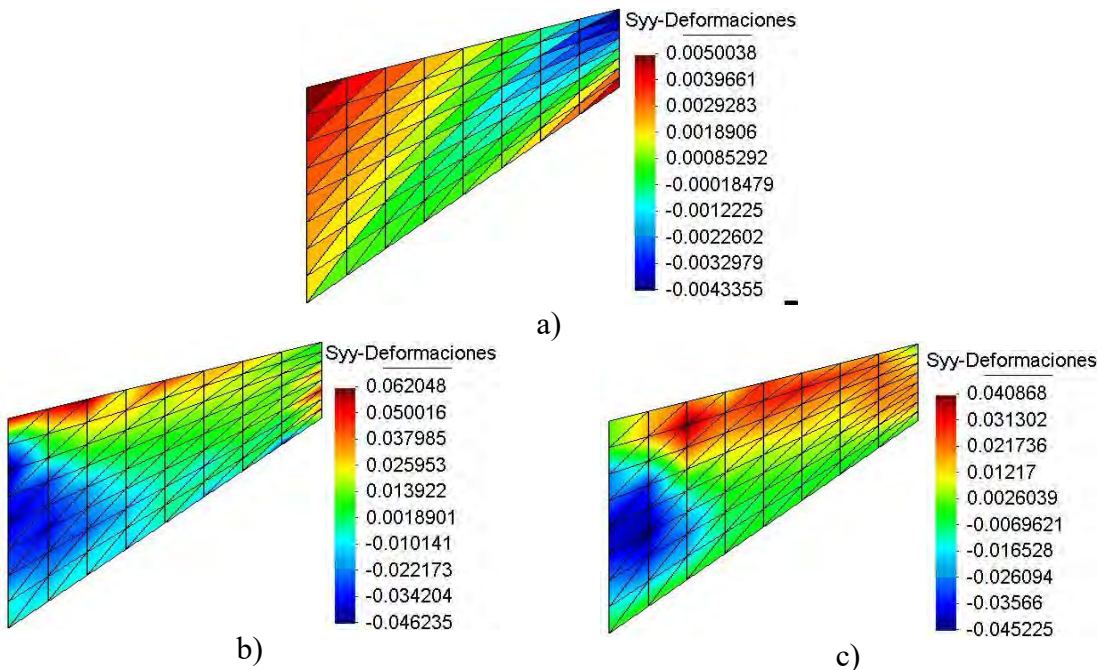


Figura 4.52 Deformaciones ε_y con 128 elementos formulación: a) u, b) u- ε y c) u- ε - σ

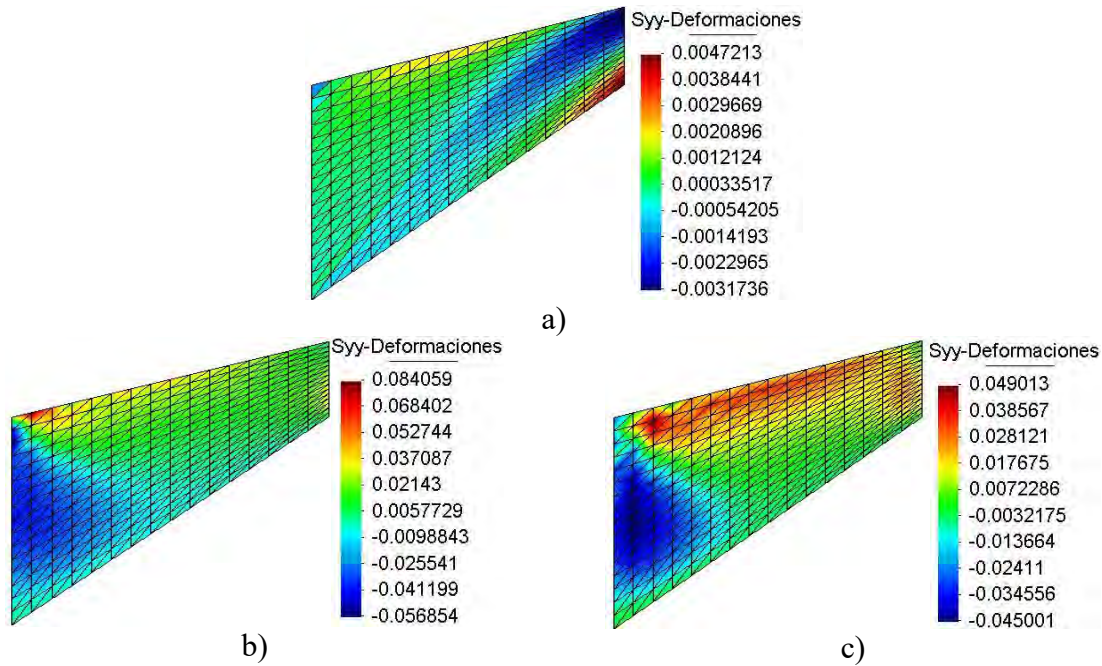


Figura 4.53 Deformaciones ε_y con 512 elementos formulación: a) u, b) u- ε y c) u- ε - σ

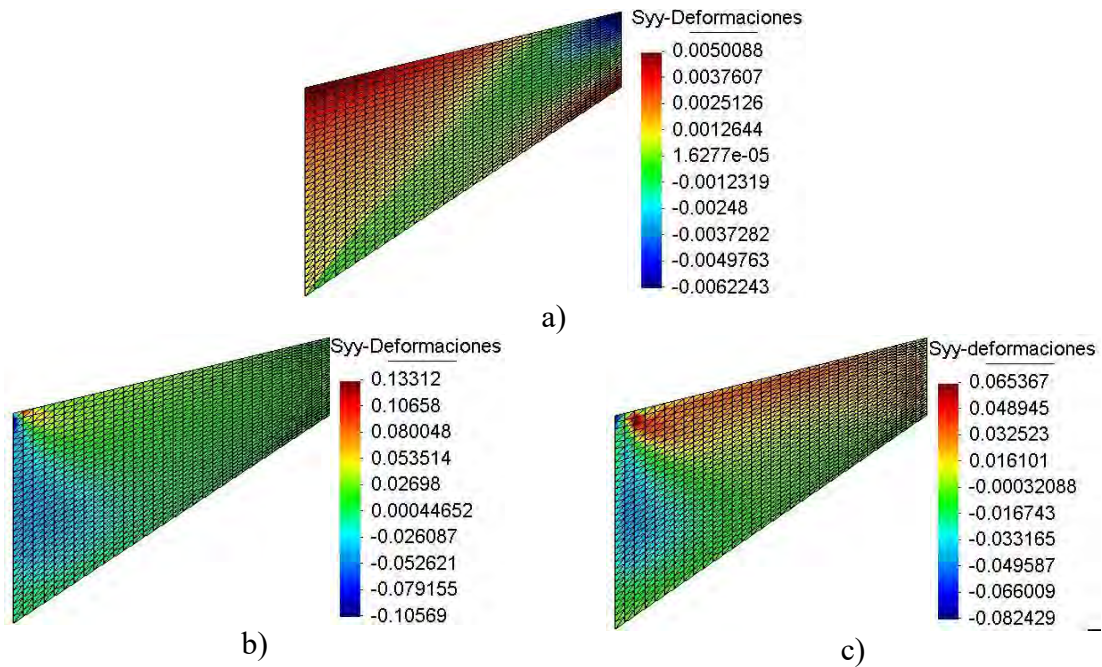


Figura 4.54 Deformaciones ε_y con 2048 elementos formulación: a) u, b) u- ε y c) u- ε - σ

4.9 Espécimen de concreto con ranuras al centro

En este ejemplo se tiene un bloque de concreto de 5cm de espesor con ranuras en la parte inferior y superior sometido a una carga de tensión horizontal $t = 10,000 \text{ kgf/m}$ como se muestra en la figura 4.55, módulo de Poisson $\nu = 0.2$ y módulo de elasticidad $E = 221,359 \text{ kgf/cm}^2$. En la figura 4.56 se muestran las mallas estructuradas las cuales constan de mallas de 416 y 1664 elementos triangulares, respectivamente.

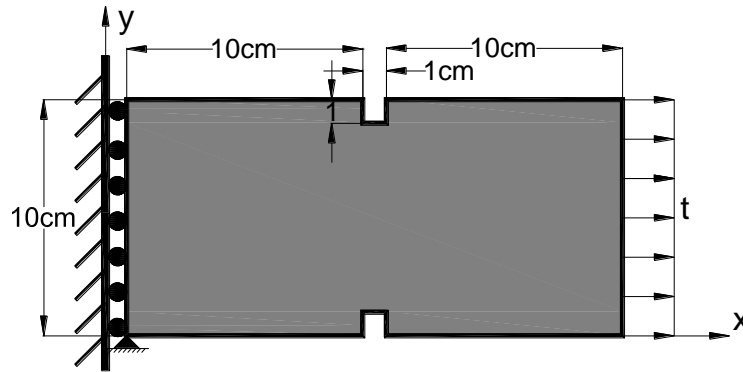
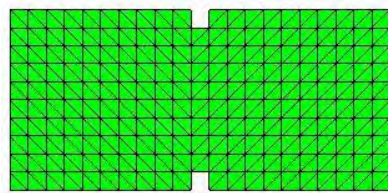
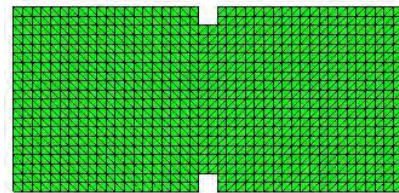


Figura 4.55 Espécimen de concreto con ranuras



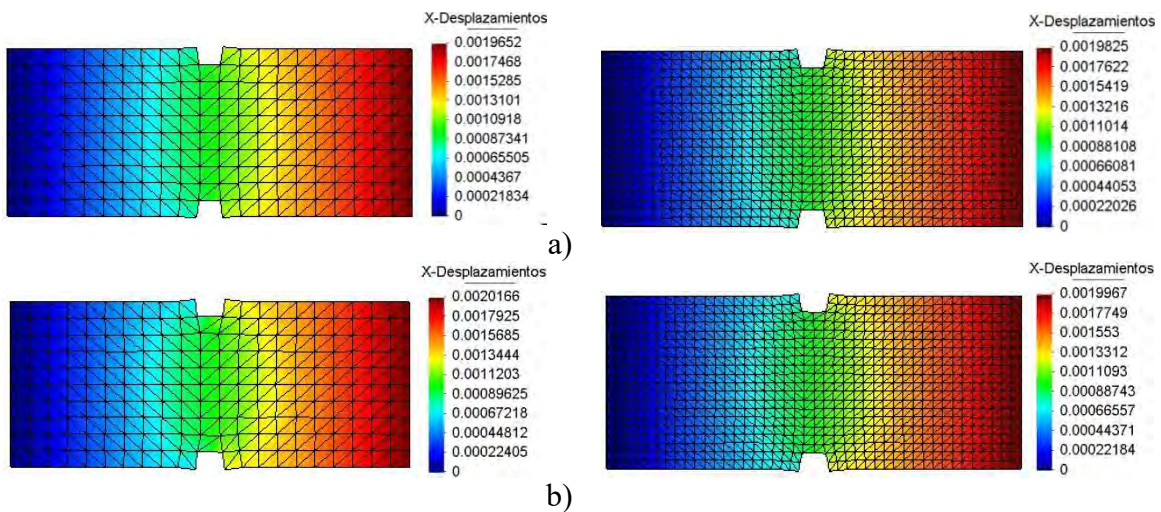
a)



b)

Figura 4.56 Mallado del elemento con: a) 416 y b) 1664 elementos.

En la figura 4.57 se muestran los valores de desplazamiento horizontal para todas las formulaciones implementadas.



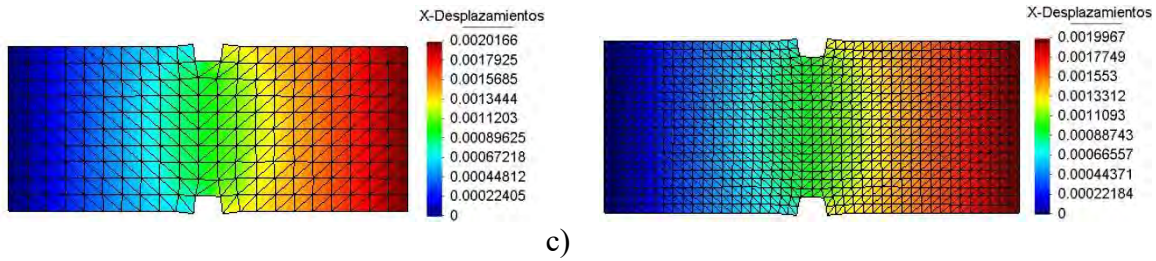


Figura 4.57 Desplazamientos de elemento formulación: a) u, b) u- σ y u- ϵ , c) u- ϵ - σ

En las figuras 4.58 y 4.59 se muestran los esfuerzos σ_x en kgf/cm^2 que se presentan en el elemento de concreto donde se nota que en las zonas donde están las ranuras se tiene una concentración de esfuerzos importante en comparación a las demás zonas del elemento, y donde la variación de esfuerzos en cada elemento es mejor con las formulaciones mixtas que con los obtenidos con la formulación estándar de desplazamientos.

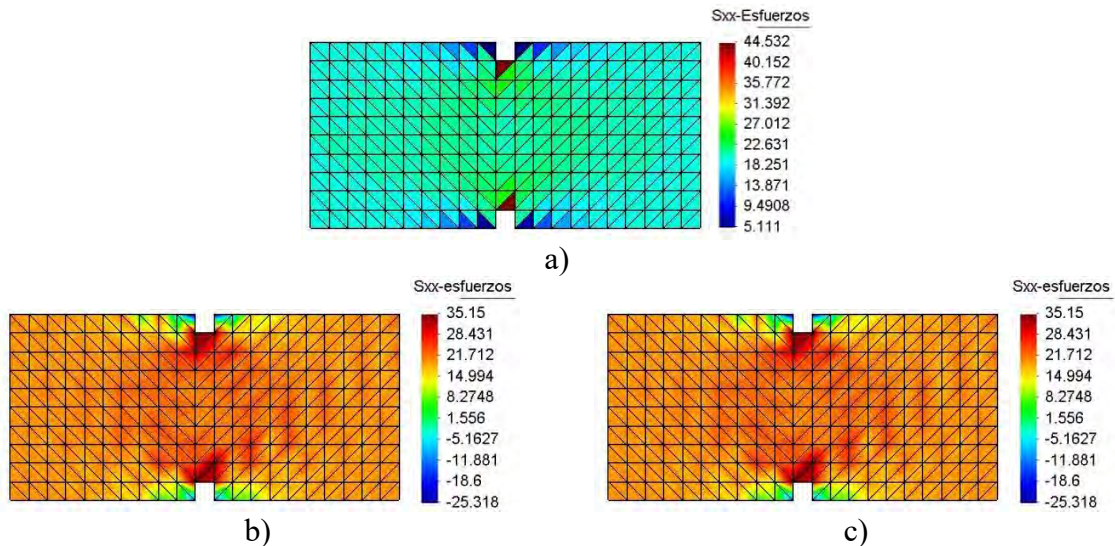
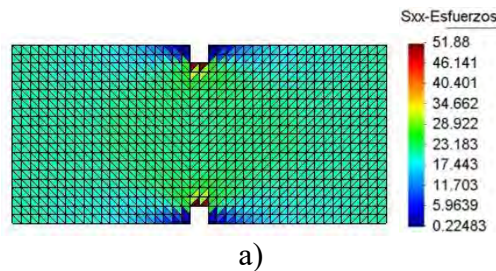


Figura 4.58 Esfuerzos σ_x en malla de 416 elementos formulación: a) u, b) u- σ y c) u- ϵ - σ



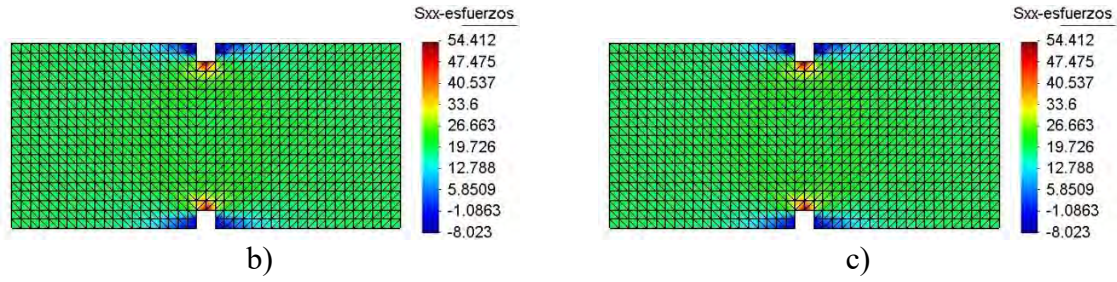


Figura 4.59 Esfuerzos σ_x en malla de 1664 elementos formulación: a) u , b) $u-\sigma$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$

En las figuras 4.60 y 4.61 se muestran las deformaciones ε_x que se presentan en el elemento de concreto donde se nota que en las zonas en la vecindad de las ranuras se tiene una concentración de deformaciones importante en comparación a las demás zonas del elemento, y donde la variación de deformaciones en cada elemento es mejor con las formulaciones mixtas que con los obtenidos con la formulación estándar de desplazamientos.

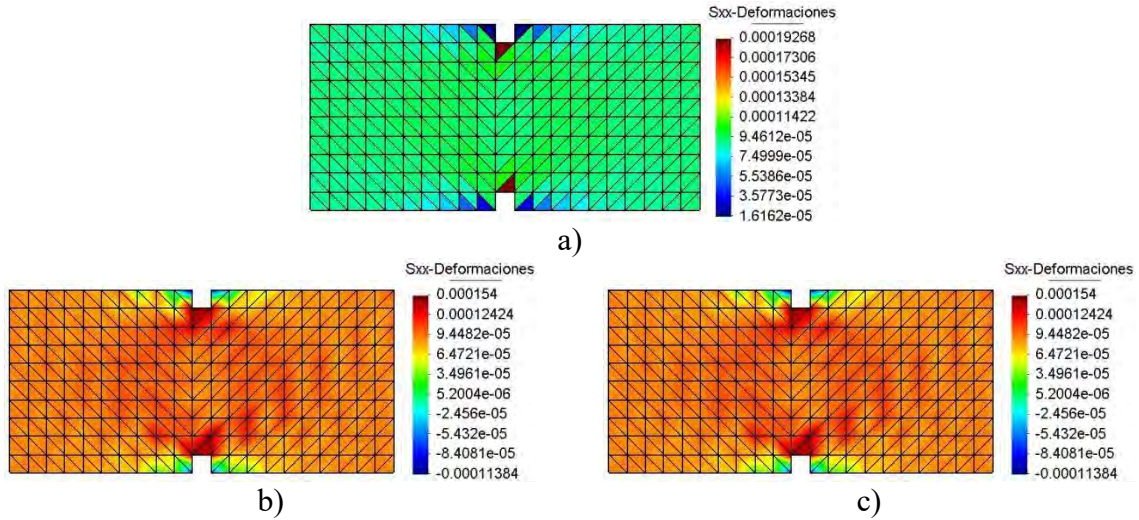
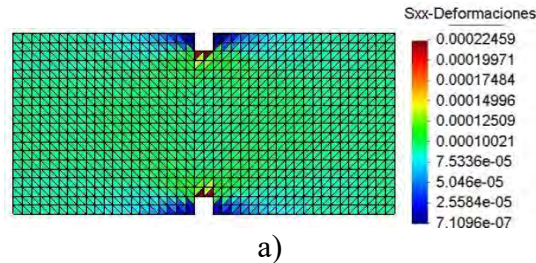


Figura 4.60 Deformaciones ε_x en malla con 416 elementos formulación: a) u , b) $u-\varepsilon$ y c) $u-\varepsilon-\sigma$



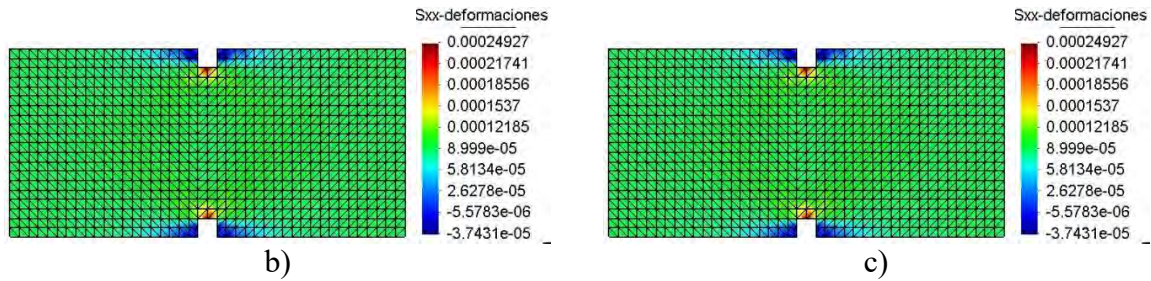


Figura 4.61 Deformaciones ϵ_x en malla con 1664 elementos formulación: a) u, b) u- ϵ y c) u- ϵ - σ

Se realizaron dos cortes en la parte superior en la zona de las muescas, donde se tiene una mayor concentración de esfuerzos y deformaciones, y uno en la parte media como se muestra en la figura 4.62, donde se obtuvieron los esfuerzos σ_x los cuales se graficaron como se muestra en la figuras 4.68 a 4.70 respectivamente, en los que se obtienen valores máximos de esfuerzo en la zona central, que es la zona de la muesca, en el corte realizado en la parte media se tiene una variación más uniforme y en la que la formulación mixta suaviza los resultados.

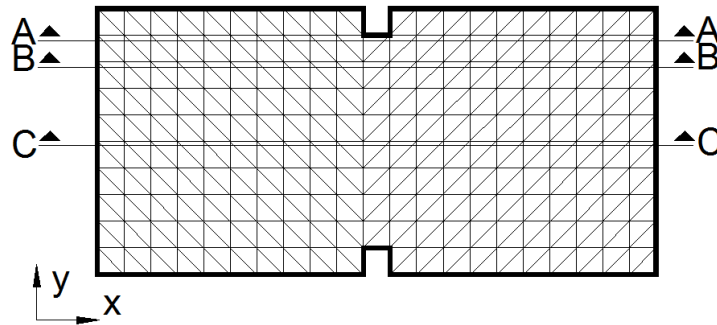


Figura 4.62 Corte de elemento de concreto

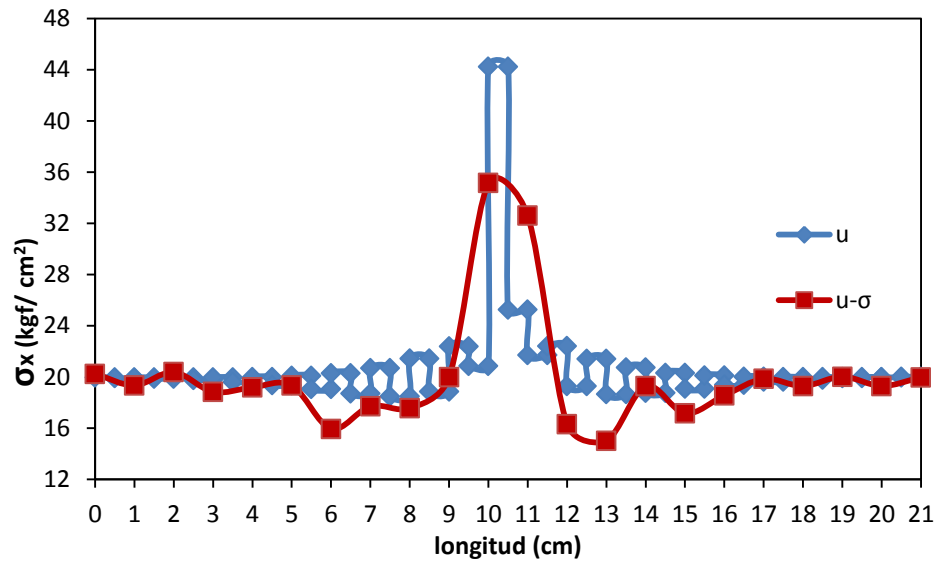


Figura 4.63 Esfuerzo σ_x en corte A

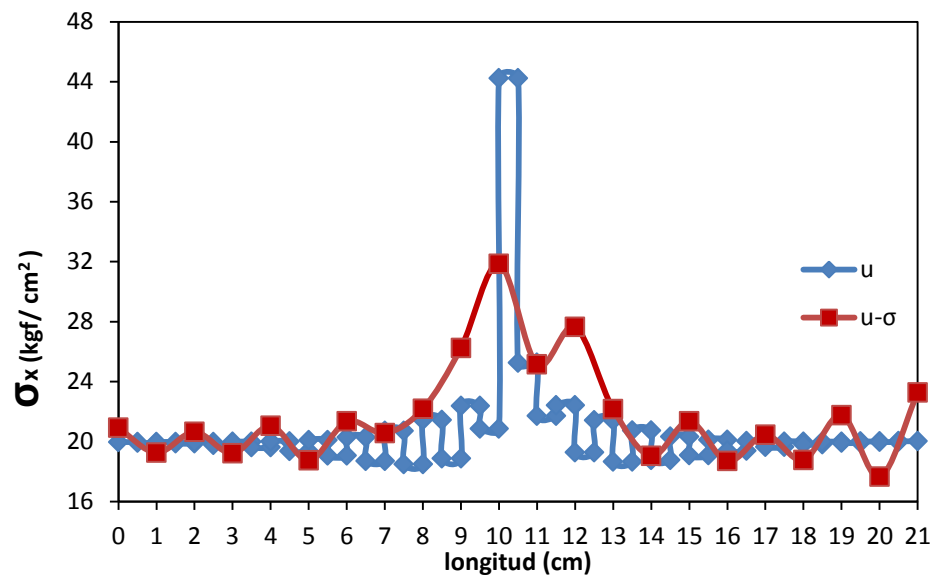


Figura 4.64 Esfuerzo σ_x en corte B

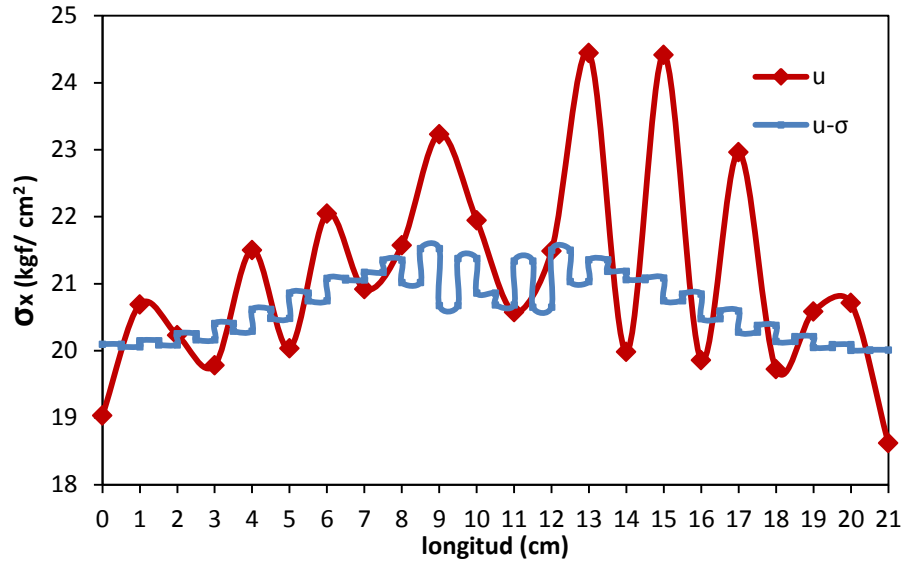


Figura 4.65 Esfuerzo σ_x en corte C

4.10 Espécimen sometido a cargas horizontales en la misma dirección

Este ejemplo fue tomado de Zhang y Chen (1997) el cual consiste de una viga en cantiléver, con una malla propuesta de 4 elementos, sometida a dos fuerzas horizontales como se muestra en la figura 4.66, módulo de Poisson $\nu=0.25$, módulo de elasticidad $E=1500$, puesto que los elementos implementados son triangulares, la malla fue modificada como se muestra en la figura 4.66, en términos generales, un elemento ideal debería producir soluciones exactas por lo menos para los casos más simples tales como mallas irregulares sometidos a cargas de tensión constante uniforme, donde para este ejemplo se espera un estado de esfuerzos y deformaciones constantes(Zhang y Chen 1997).

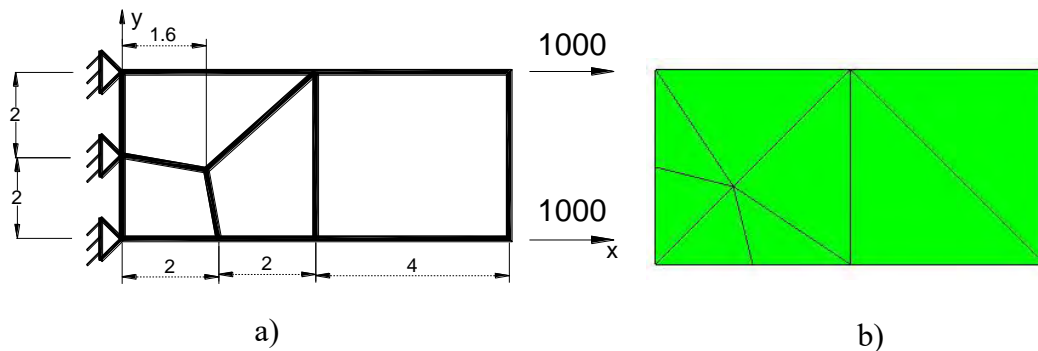


Figura 4.66 a) Viga en cantiléver, b) Malla propuesta

En la figura 4.67 se muestran los valores de desplazamiento horizontal, deformaciones ϵ_x y esfuerzos σ_x para las 4 formulaciones implementadas en este trabajo, siendo los valores consistentes con lo reportado en Zhang y Chen (1997) donde se obtienen esfuerzos y deformaciones constantes a lo largo de todo el elemento y un valor de desplazamiento de 6cm, para las cuatro formulaciones implementadas se obtuvieron los mismos resultados de

desplazamiento, deformación y esfuerzo, en la tabla 2 se muestran los valores de desplazamientos y esfuerzos para todas las formulaciones implementadas.

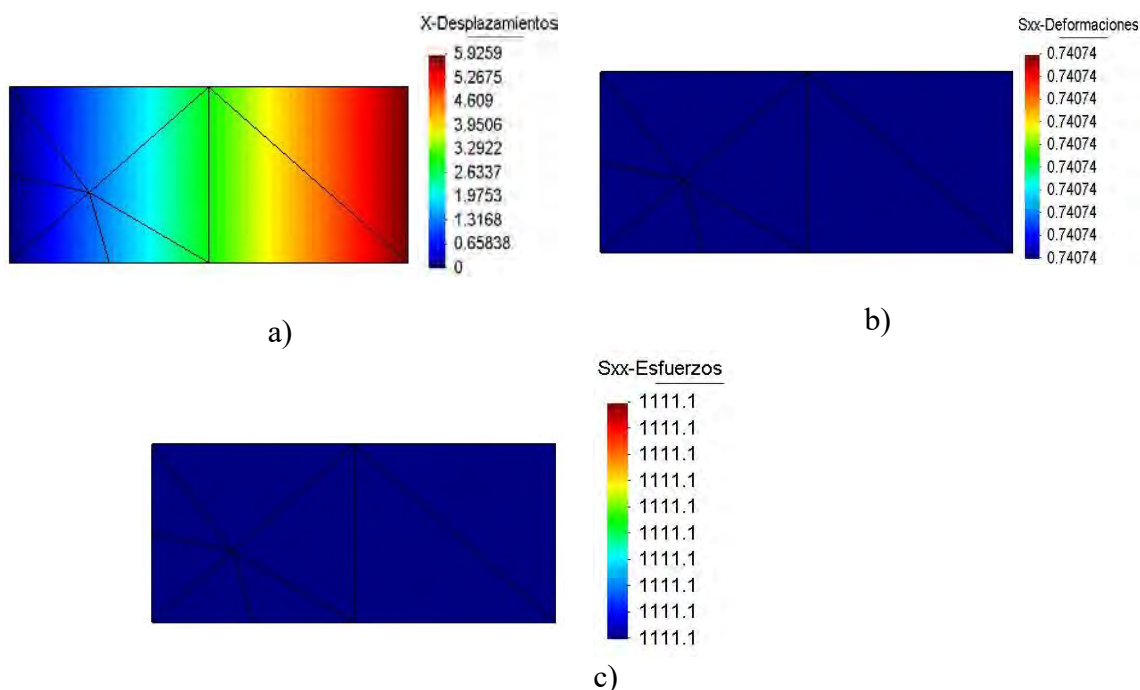


Figura 4.67 Viga en cantiléver a) desplazamientos, b) deformaciones y c) esfuerzos

Zhang y Chen (1997) reportan valores de desplazamientos para todas las formulaciones usadas de 6 cm y de esfuerzos constantes, en la tabla 2 se muestran los valores obtenidos con los programas desarrollados en este trabajo para las diferentes formulaciones.

Tabla 2. Resultados de desplazamientos y esfuerzo

formulación	desplazamiento U_a	Esfuerzo σ_x
u	5.93	constante
$u-\epsilon$	5.93	constante
$u-\epsilon-\sigma$	5.93	constante
$u-\sigma$	5.93	constante

4.11 Espécimen sometido a cargas por cortante

Este ejemplo adimensional fue tomado de Zhang y Chen (1997), el cual consiste de una viga en cantiléver, con una malla propuesta de 4 elementos, sometida a dos fuerzas horizontales como se muestra en la figura 4.68, módulo de Poisson $\nu=0.25$, módulo de elasticidad $E=1500$, puesto que los elementos implementados son triangulares, la malla fue modificada como se muestra en la figura 4.69 debido a que en el programa de cálculo en este trabajo solo emplea elementos triangulares.

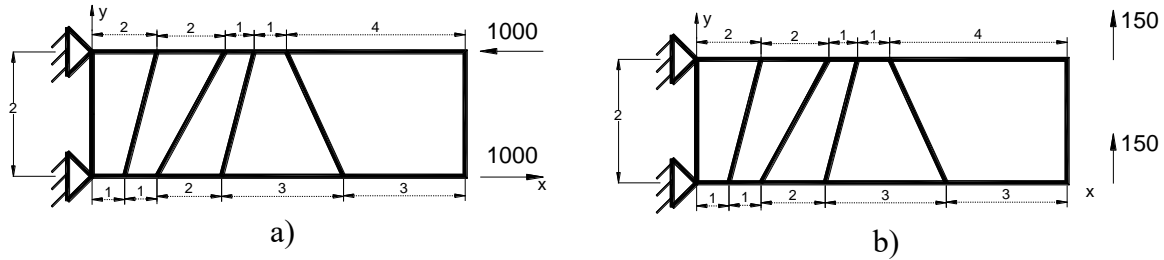


Figura 4.68 a) caso 1 y b) caso 2

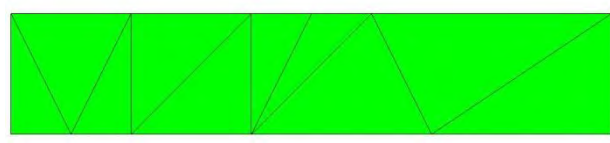


Figura 4.69 Malla

En la figura 4.70 se muestra la viga deformada ante la acción de las fuerzas ante las cuales esta sometido el espécimen.

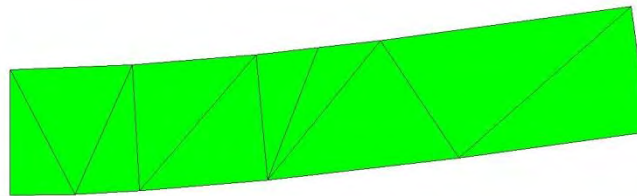


Figura 4.70 Viga deformada

En la tabla 3 se muestran los valores de desplazamiento máximo vertical del primer caso dividido entre el desplazamiento vertical máximo del segundo caso para obtener un valor de aproximación, en las formulaciones mixtas $u-\epsilon$, $u-\sigma$ y $u-\epsilon-\sigma$ se obtuvieron valores con una aproximación del 92.5% a la solución exacta reportada por Zhang y Chen (1997), en comparación con el valor obtenido con la aplicación de la formulación estándar de desplazamientos que se aproxima en un 91%.

Tabla3. Relación de desplazamientos

formulación	desplazamiento U_a caso1/caso2	exacta
u	0.886	0.974
$u-\epsilon$	0.901	0.974
$u-\epsilon-\sigma$	0.901	0.974
$u-\sigma$	0.901	0.974

4.12 Espécimen sujeto a momento

Este ejemplo adimensional propuesto por Masud y Xia (2005) consiste de un espécimen con la malla propuesta de 4 elementos, módulo de Poisson $\nu=0.25$, módulo de elasticidad $E=1500$, sometido a momento como se muestra en la figura 4.71, el valor de a se varía de 1 hasta 4 para evaluar la sensibilidad de los elementos ante una malla distorsionada.

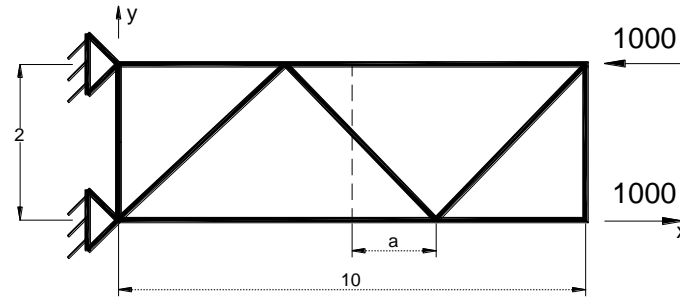


Figura 4.71 Viga en cantiléver

En la figura 4.72 se muestra la viga deformada ante la acción del momento aplicado cuando $a=4$.

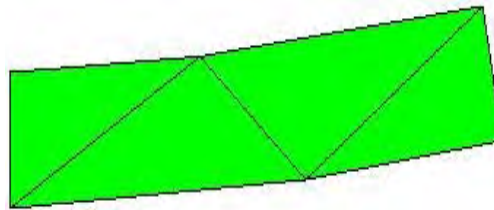


Figura 4.72 Viga deformada

En la tabla 4 se muestran los valores de desplazamientos de todas las variaciones de a , para las 4 diferentes formulaciones implementadas en este trabajo. Estos resultados son consistentes con los reportados por Masud y Xia (2005) en cuanto al 50% aproximado de diferencia del error entre el desplazamiento cuando $a=0$ y $a=4$, no es posible comparar la magnitud, ya que estos autores proporciona el desplazamiento normalizado, pero no indican el valor de normalización.

Tabla 4. Desplazamientos horizontales máximos.

a	formulación			
	u	u- ϵ	u- σ	u- ϵ - σ
1	0.23	0.44	0.44	0.44
2	0.2	0.32	0.32	0.32
3	0.19	0.29	0.29	0.29
4	0.15	0.23	0.23	0.23

CAPÍTULO 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

El objetivo principal este trabajo es el desarrollo de programas de elementos finitos mixtos que mejoren los resultados que se obtenían con la formulación estándar de desplazamientos, además de lograr mejores resultados en problemas en las que la solución estándar de desplazamientos presenta problemas de atoramiento. También, con el fin de validar el buen funcionamiento de cada una de las aproximaciones propuestas, se desarrollaron códigos computacionales, los cuales se han validado con ejemplos numéricos que se comparan con los resultados teóricos.

De este trabajo se derivan las siguientes conclusiones:

- a) Con base a los resultados obtenidos en el ejemplo de la membrana de Cook se concluye que el uso de elementos finitos mixtos supera el problema de bloqueo dando buenos resultados en problemas que tienen relación de Poisson cercano a 0.5, mientras que para este valor de la relación de Poisson haciendo uso de la formulación estándar de desplazamientos los elementos se bloquean, dando valores de desplazamientos casi nulos.
- b) Haciendo uso de las formulaciones mixtas se tienen mejores resultados utilizando mallas no tan finas en comparación con una malla en la formulación estándar, la cual requiere de mallas más finas para obtener un mejor estado de esfuerzos. En todos los ejemplos se observa que las formulaciones mixtas se aproximan más a las soluciones exactas haciendo uso de mallas con pocos elementos a diferencia de la formulación estándar la cual requiere de un mayor número de elementos para tener una buena aproximación a la solución exacta.
- c) Utilizando programas de elementos finitos mixtos se mejoran los resultados en comparación con una formulación estándar de desplazamientos, se tiene una mejor aproximación en los campos de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos, en todos los casos las aproximaciones a las soluciones exactas son mejores con la utilización de las formulaciones mixtas.
- d) Se obtienen gráficos más suavizados del estado de esfuerzos y deformaciones con las formulaciones mixtas, ya que en la formulación de desplazamientos se obtienen los esfuerzos y deformaciones constantes para cada elemento, mientras que con las formulaciones mixtas se obtienen los valores para cada nodo variables para cada elemento.

e) Con el uso de las formulaciones mixtas el tiempo de cómputo requerido para tener buenas aproximaciones es menor que con la utilización de la formulación estándar de desplazamientos, debido al uso de mallas menos finas para obtener una buena aproximación.

5.2 Recomendaciones

A continuación se hacen las siguientes recomendaciones:

- a) Utilizar mallas triangulares estructuradas.
- b) Aprovechar la simetría de los elementos a analizar para reducir el tiempo de análisis computacional.
- c) No utilizar mallas con un alto número de elementos ya que el tiempo de análisis es muy elevado y en ciertas condiciones no hay convergencia.

5.3 Trabajos futuros

Con base a esta tesis se derivan una serie de trabajos que pueden desarrollarse a futuro, algunos de ellos se mencionan a continuación:

- a) Mejorar los programas para que además de la figura deformada, realice los gráficos de esfuerzos y deformaciones.
- b) Resolver problemas inelásticos con elementos finitos mixtos.
- c) Mejorar los programas para realizar análisis dinámicos.
- d) Implementar las condiciones para poder realizar análisis de elementos con sección compuesta.
- e) Realizar la programación para resolver problemas en 3D.

Referencias

- [1] **Ansys (2009).** “Ansys 12.0.1”, *Ansys Inc. Estados Unidos*.
- [2] **Argyris J. (1974)**, “Large natural strains and some special difficulties due to nonlinearity and incompressibility in finite elements”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 4 pp 219-278.
- [3] **Arnold D. , Brezzi F. y Fortin M. (1984)**. “A stable finite element for the Stokes equations”. *Estrato de Calcolo* vol. XXI, fasc. IV, pp. 337-344.
- [4] **Atluri, S. (1975)**. “On hybrid finite element models in solid mechanics”. *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, AICA, pp 346-356.
- [5] **Babuska I. (1971)**, “Error bounds for finite element methods.” *Numerical Mathematics*, vol.16, pp 322-333.
- [6] **Berrocal L. (1998)**, “**Elasticidad**” (3ª edición), España: Mcgraw Hill.
- [7] **Brezzi, F. y Bathe, K. (1990)**. “A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations”, *Computer Methods in Applied Mechanics* vol. 82, . pp.27-57.
- [8] **Brezzi F. y Fortin M. (1991)**. “Mixed and Hybrid Finite Element Methods”. Springer Verlag, NY.
- [9] **Brezzi, F. (1974)**. “On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers”. *RAIRO*, vol 8 pp.129—151.
- [10] **Dunham R. y Pister K. (1968)**, “A finite element application of the Hellinger-Reissner variational theorem” 1st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Ohio. pp. 471-487.
- [11] **Fried, I. (1974)**. “Finite element analysis of incompressible material by residual energy balancing”. *International Journal of Solids and Structures*, vol.10, pp. 993-1002.
- [12] **Hellan K. (1967)**. “Analysis of elastic plates in flexure by a simplified finite element method”. *Acta Polytechnica Scandinavica. Civil Engineering Series*, 46 .
- [13] **Hermann L. (1965)**. “Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem” *AIA A*, vol. 3 pp. 1896-1900.

- [14] **Hughes T., Franca L. y Balestra M. (1987).** “A new finite element formulation for computational fluid dynamics”. Computer Methods in Applied Mechanics, vol. 65, pp. 85-96.

- [15] **Malkus D. y Hughes, T. (1978).** “Mixed finite element methods - reduced and selective integration methods: a unification of concepts”. Computer Methods in Applied Mechanics, vol. 15, pp.68-81.

- [16] **Masud A. y Xia K. (2005).** “ A Stabilized mixed Finite Element Method for Nearly Incompressible Elasticity”. Journal of Applied Mechanics, vol.5.

- [17] **Nagtegaal J., Park D. y Rice J. (1974).** “On numerical accurate finite element solutions in the fully plastic range”. Computer Methods in Applied Mechanics, vol.4, pp.:153-177.

- [18] **Oñate E. (1992).** “ Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos”, CIMNE, Barcelona España.

- [19] **Pian T. (1964).** “Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution”. AIAA Journal, vol. 2, pp.1333-1336.

- [20] **Turner M., Clouth R., Martin H. y Topp L. (1956)** “Stiffness and deflection analisis of complex structures”. Journal of the aeronautical Sciencies, pp.805-823.

- [21] **Timoshenko S. (1951),** “Theory of elasticity”(2a edicion), Estados Unidos: Mcgraw Hill.

- [22] **Valverde M. (2002).** “Elementos estabilizados de bajo orden en mecánica de sólidos” tesis, Universidad Politécnica de Cataluña, España.

- [23] **Washizu K. (1955).** “ On variational principle of elasticity and plasticity aero-elastic and structures research laboratory M.I.T”, reporte tecnico, Estados Unidos.

- [24] **Zhang W. y Chen P. (1997).** “ The patch test conditions and some multivariable finite element formulations”. International journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pp. 3015-3032.

- [25] **Zienkiewics O. y Taylor R. (1994).**”el método de los elementos finitos”(4ª edición), España: Mcgraw Hill.

- [26] **Zienkiewicz O. (1977).** “The Finite Element Method” (3^a edición), Inglaterra: MacGraw-Hill.
- [27] **Zienkiewicz O., Taylor R. y Too J. (1971),** “Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 3, pp. 275-290.

Anexo A

Programa de desplazamientos

A continuación se muestra el código del programa para la formulación de desplazamientos. La estructura de todos los programas es la misma, un programa principal el cual hace uso de una serie de subprogramas.

Programa principal

```
% formulación de desplazamientos
```

```
clc  
clear all  
close all
```

```
% Lectura de archivo de entrada  
malla01_viga;
```

```
% PREPROCESO  
preprocesor;
```

```
% PROCESO  
procesor;
```

```
% POSTPROCESO  
postprocesor;
```

Preproceso

```
% Lectura de condiciones de frontera  
condu=zeros(Nn,Ndof);  
for bc=1:Nbc;  
    condu(cond(bc,1),1)=cond(bc,2);  
    condu(cond(bc,1),2)=cond(bc,3);  
end;
```

```
% Determinacion de grados de libertad  
cont=0;  
for node=1:Nn;  
    for dof=1:Ndof;  
        if condu(node,dof)==1;  
            condu(node,dof)=0;  
        else  
            cont=cont+1;  
            condu(node,dof)=cont;  
        end;  
    end;  
end;  
neq=cont;
```

```

% Lectura de fuerzas en los nodos
fu=zeros(neq,1);
for nl=1:Nnl;
    fu(condu(loads(nl,1),1))=loads(nl,2);
    fu(condu(loads(nl,1),2))=loads(nl,3);
end;

% Determinación de los grados de libertad de cada elemento
ve=zeros(Ne,Nen*Ndof);
for nel=1:Ne;
    cont=0;
    for node=1:Nen;
        for dof=1:Ndof;
            cont=cont+1;
            ve(nel,cont)=condu(elemt(nel,node+3),dof);
        end;
    end;
end;

% calculo de la matriz B
B=zeros(3,6);
a1=coord(elemt(nel,5),2)*coord(elemt(nel,6),3)-coord(elemt(nel,6),2)*coord(elemt(nel,5),3);
a2=coord(elemt(nel,6),2)*coord(elemt(nel,4),3)-coord(elemt(nel,4),2)*coord(elemt(nel,6),3);
a3=coord(elemt(nel,4),2)*coord(elemt(nel,5),3)-coord(elemt(nel,5),2)*coord(elemt(nel,4),3);
a=(a1+a2+a3)/2;
B(1,1)=(coord(elemt(nel,5),3)-coord(elemt(nel,6),3))/(2*a);
B(1,3)=(coord(elemt(nel,6),3)-coord(elemt(nel,4),3))/(2*a);
B(1,5)=(coord(elemt(nel,4),3)-coord(elemt(nel,5),3))/(2*a);
B(2,2)=(coord(elemt(nel,6),2)-coord(elemt(nel,5),2))/(2*a);
B(2,4)=(coord(elemt(nel,4),2)-coord(elemt(nel,6),2))/(2*a);
B(2,6)=(coord(elemt(nel,5),2)-coord(elemt(nel,4),2))/(2*a);
B(3,1)=B(2,2);
B(3,2)=B(1,1);
B(3,3)=B(2,4);
B(3,4)=B(1,3);
B(3,5)=B(2,6);
B(3,6)=B(1,5);

% calculo de matriz CE
if Ta==1;
    d1=matprop(elemt(nel,2),2)/(1-(matprop(elemt(nel,2),3))^2);
    d2=matprop(elemt(nel,2),3);
    d3=(1-(matprop(elemt(nel,2),3)))*0.5;
elseif Ta==2;
    d1=matprop(elemt(nel,2),2)*(1-(matprop(elemt(nel,2),3)))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3))-
    2*(matprop(elemt(nel,2),3))^2);
    d2=(matprop(elemt(nel,2),3))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3)));
    d3=0.5*(1-2*(matprop(elemt(nel,2),3)))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3)));
end
Ce=zeros(3);
Ce(1,1)=d1;
Ce(1,2)=d1*d2;
Ce(2,1)=Ce(1,2);
Ce(2,2)=Ce(1,1);

```

```

Ce(3,3)=d1*d3;

% calculo de matriz de rigideces
forma_B;
ke=zeros(Nen*Ndof,Nen*Ndof);
ke=B'*C*B*a*elemt(nel,3);

% ensamble de la matriz de rigideces
for dof=1:Nen*Ndof;
    if ve(nel,dof)~=0;
        for dof2=1:Nen*Ndof;
            if ve(nel,dof2)~=0;
                kt(ve(nel,dof),ve(nel,dof2))=kt(ve(nel,dof),ve(nel,dof2))+ke(dof,dof2);
            end;
        end;
    end;
end;
end;

```

Proceso

```

kt=zeros(neq,neq);
for nel=1:Ne;
    forma_Ce;
    C=Ce;
    kglobal;
end;
prescribed;
solver;

defesf;

% calculo de esfuerzos y deformaciones de cada elemento
et=zeros(Ne,3);
st=zeros(Ne,3);
for nel=1:Ne;
    ue=zeros(Nen*Ndof,1);
    for dof=1:Nen*Ndof;
        if ve(nel,dof)==0;
            ue(dof)=0;
        else;
            ue(dof)=u(ve(nel,dof));
        end;
    end;
    forma_B;
    forma_Ce;
    et(nel,1:3)=B*ue;
    st(nel,1:3)=Ce*et(nel,1:3)';
end;

% imposición de variables prescritas
ftot=zeros(neq,1);
ftot=fu;
for pv=1:Npv;
    for dof=1:Ndof;
        if displ(pv,dof+1)~=0;

```

```

        aux=displ(pv,dof+1);
        for j=1:neq;
            ftot(j,1)=ftot(j,1)-kt(j,condu(displ(pv,1),dof))*aux;
            kt(j,condu(displ(pv,1),dof))=0;
            kt(condu(displ(pv,1),dof),j)=0;
        end;
        kt(condu(displ(pv,1),dof),condu(displ(pv,1),dof))=1;
    end;
end;
end;
% solución de matriz de coeficientes
u=pinv(kt)*ftot;
for pv=1:Npv;
    for dof=1:Ndof;
        if displ(pv,dof+1)~=0;
            u(condu(displ(pv,1),dof))=displ(pv,dof+1);
        end;
    end;
end;
end;

```

Postproceso

```

% POSTPROCESO
ut=zeros(Nn,2);
cont=0;
for node=1:Nn;
    for dof=1:Ndof;
        if condu(node,dof)==0;
            ut(node,dof)=0;
        else
            cont=cont+1;
            ut(node,dof)=u(cont);
        end;
    end;
end;
elems=(1:Ne)';
nodos=(1:Nn)';
solu=[nodos ut];
sole=[elems et];
sols=[elems st];
iplot;
save sol_u_malla03.dat solu -ascii;
save sol_e_malla03.dat sole -ascii;
save sol_s_malla03.dat sols -ascii;

```

grafica

```

xi=coord(:,2);
yi=coord(:,3);
dx=ut(:,1);
dy=ut(:,2);
xt=xi+dx;
yt=yi+dy;
z=zeros(Nn,1);
trisurf(elems(:,4:6),xt,yt,z);
view(0,90);
%set(gca,'XLim',[0,2.3]);

```



```
%set(gca,'YLim',[-0.8,0.6]);
```

Anexo B

Programa de desplazamientos –deformaciones

Programa principal

%Formulación desplazamiento-deformación, u-e.

```
clc
clear all
close all
```

```
% Lectura de archivo de entrada
malla01_viga;
```

```
% PREPROCESO
preprocesor;
```

```
% PROCESO
procesor;
```

```
% POSTPROCESO
postprocesor;
```

Preproceso

```
% lectura de condiciones de frontera del archivo de entrada
conde=zeros(Nn,Ndof-2);
```

```
for bc=1:Nbc;
    conde(cond(bc,1),1)=cond(bc,2);
    conde(cond(bc,1),2)=cond(bc,3);
    conde(cond(bc,1),3)=cond(bc,4);
```

```
end;
condu=zeros(Nn,Ndof-3);
for bc=1:Nbc;
    condu(cond(bc,1),1)=cond(bc,5);
    condu(cond(bc,1),2)=cond(bc,6);
end;
```

```
% determinacion de grados de libertad de elementos no restringidos
% grados de libertad para esfuerzos
```

```
cont=0;
for node=1:Nn;
    for dofe=1:(Ndof-2);
        if conde(node,dofe)==1;
            conde(node,dofe)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            conde(node,dofe)=cont;
        end;
    end;
end;
neqe=cont;
```

```

% % grados de libertad para desplazamiento
for node=1:Nn;
    for dofu=1:(Ndof-3);
        if condu(node,dofu)==1;
            condu(node,dofu)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            condu(node,dofu)=cont;
        end;
    end;
end;
neq=cont;

% lectura de fuerzas en los nodos del archive de entrada
fe=zeros(neqe,1);
fu=zeros(neq-neqe,1);
for nl=1:Nnl;
    fu(condu(loads(nl,1),1)-neqe)=loads(nl,2);
    fu(condu(loads(nl,1),2)-neqe)=loads(nl,3);
end;

% determinación de grados de libertad de cada elemento
for nel=1:Ne;
    cont=0;
    for node=1:Nen;
        for dofe=1:(Ndof-2);
            cont=cont+1;
            ve(nel,cont)=conde(elemt(nel,node+3),dofe);
        end;
    end;
    for node=1:Nen;
        for dofu=1:(Ndof-3);
            cont=cont+1;
            ve(nel,cont)=condu(elemt(nel,node+3),dofu);
        end;
    end;
end;

% calculo de la matriz B
B=zeros(3,6);
a1=coord(elemt(nel,5),2)*coord(elemt(nel,6),3)-coord(elemt(nel,6),2)*coord(elemt(nel,5),3);
a2=coord(elemt(nel,6),2)*coord(elemt(nel,4),3)-coord(elemt(nel,4),2)*coord(elemt(nel,6),3);
a3=coord(elemt(nel,4),2)*coord(elemt(nel,5),3)-coord(elemt(nel,5),2)*coord(elemt(nel,4),3);
a=(a1+a2+a3)/2;
B(1,1)=(coord(elemt(nel,5),3)-coord(elemt(nel,6),3))/(2*a);
B(1,3)=(coord(elemt(nel,6),3)-coord(elemt(nel,4),3))/(2*a);
B(1,5)=(coord(elemt(nel,4),3)-coord(elemt(nel,5),3))/(2*a);
B(2,2)=(coord(elemt(nel,6),2)-coord(elemt(nel,5),2))/(2*a);
B(2,4)=(coord(elemt(nel,4),2)-coord(elemt(nel,6),2))/(2*a);
B(2,6)=(coord(elemt(nel,5),2)-coord(elemt(nel,4),2))/(2*a);
B(3,1)=B(2,2);
B(3,2)=B(1,1);
B(3,3)=B(2,4);
B(3,4)=B(1,3);
B(3,5)=B(2,6);
B(3,6)=B(1,5);

```

```

% calculo de matriz CE
if Ta==1;
    d1=matprop(elemt(nel,2),2)/(1-(matprop(elemt(nel,2),3))^2);
    d2=matprop(elemt(nel,2),3);
    d3=(1-(matprop(elemt(nel,2),3)))*0.5;
elseif Ta==2;
    d1=matprop(elemt(nel,2),2)*(1-(matprop(elemt(nel,2),3)))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3))-
2*(matprop(elemt(nel,2),3))^2);
    d2=(matprop(elemt(nel,2),3))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3)));
    d3=0.5*(1-2*(matprop(elemt(nel,2),3)))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3)));
end
Ce=zeros(3);
Ce(1,1)=d1;
Ce(1,2)=d1*d2;
Ce(2,1)=Ce(1,2);
Ce(2,2)=Ce(1,1);
Ce(3,3)=d1*d3;

%calculo de la matriz de rigidez
forma_B;
kaa=[-a*C/6 -a*C/12 -a*C/12;
    -a*C/12 -a*C/6 -a*C/12;
    -a*C/12 -a*C/12 -a*C/6];
kabt=[a*C*B/3; a*C*B/3; a*C*B/3];
kab=kabt';
kbb=zeros(6,6);
ke=[kaa kabt; kab kbb]*elemt(nel,3);

%Ensamble de la matriz de rigidez
for i2=1:15;
    if ve(nel,i2)~=0;
        for j2=1:15;
            if ve(nel,j2)~=0;
                kt(ve(nel,i2),ve(nel,j2))=kt(ve(nel,i2),ve(nel,j2))+ke(i2,j2);
            end;
        end;
    end;
end;

% calculo de matriz de coeficientes
kt=zeros(neq);
for nel=1:Ne;
    forma_Ce;
    C=Ce;
    kglobal;
end;
prescribed;
solver;

%Imposición de desplazamientos prescritos
ftot=[fe; fu];
for pv=1:Npv;
    for dof=1:Ndof;
        if displ(pv,dof+1)~=0;

```

```

for k=1:neq;
    if dof+1 <= 4;
        ftot(k,1)=ftot(k,1)-kt(k,conde(displ(pv,1),dof))*displ(pv,dof+1);
        kt(k,conde(displ(pv,1),dof))=0;
        kt(conde(displ(pv,1),dof),k)=0;
        kt(conde(displ(pv,1),dof),conde(displ(pv,1),dof))=1;
    end;
    if dof+1 > 4 && dof+1 <= 6;
        ftot(k,1)=ftot(k,1)-kt(k,condu(displ(pv,1),dof-3))*displ(pv,dof+1);
        kt(k,condu(displ(pv,1),dof-3))=0;
        kt(condu(displ(pv,1),dof-3),k)=0;
        kt(condu(displ(pv,1),dof-3),condu(displ(pv,1),dof-3))=1;
    end;
end;
end;
end;
end;

%Solución de la matriz de coeficientes
[U,S,V]=svd(kt);
eu=(V*pinv(S)*U')*ftot;
for pv=1:Npv;
    for j=1:5;
        if displ(pv,j+1)~=0;
            if j+1 <= 4;
                eu(conde(displ(pv,1),j))=displ(pv,j+1);
            end;
            if j+1 > 4 & j+1 <= 6;
                eu(condu(displ(pv,1),j-3))=displ(pv,j+1);
            end;
        end;
    end;
end;
end;

postproceso
%Salida de resultados
et=zeros(Nn,3);
cont=0;
for i=1:Nn;
    for j=1:3;
        if conde(i,j)==0;
            et(i,j)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            et(i,j)=eu(cont);
        end;
    end;
end;
ut=zeros(Nn,2);
for i=1:Nn;
    for j=1:2;
        if condu(i,j)==0;
            ut(i,j)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            ut(i,j)=eu(cont);
        end;
    end;
end;

```

```

        end;
    end;
end;
nodos=(1:Nn)';
sol=[nodos ut et];
ipplot;
save sol_malla02_viga_ue.dat sol -ascii

```

Anexo C

Programa desplazamientos - esfuerzos

Programa principal

%Formulación desplazamiento-esfuerzo, u-s.

```

clc
clear all
close all

```

```

% Lectura de archivo de entrada
malla01_viga;

```

```

% PREPROCESO
preprocesor;

```

```

% PROCESO
procesor;

```

```

% POSTPROCESO
postprocesor;

```

% lectura de condiciones de frontera del archivo de entrada

```

conds=zeros(Nn,Ndof-2);
for bc=1:Nbc;
    conds(cond(bc,1),1)=cond(bc,2);
    conds(cond(bc,1),2)=cond(bc,3);
    conds(cond(bc,1),3)=cond(bc,4);
end;
condu=zeros(Nn,Ndof-3);
for bc=1:Nbc;
    condu(cond(bc,1),1)=cond(bc,5);
    condu(cond(bc,1),2)=cond(bc,6);
end;

```

% determinacion de grados de libertad de elementos no restringidos

% grados de libertad para esfuerzos

```

cont=0;
for node=1:Nn;
    for dofs=1:(Ndof-2);

```

```

        if conds(node,dofs)==1;
            conds(node,dofs)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            conds(node,dofs)=cont;
        end;
    end;
end;
neqs=cont;
% % grados de libertad de desplazamientos
for node=1:Nn;
    for dofu=1:(Ndof-3);
        if condu(node,dofu)==1;
            condu(node,dofu)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            condu(node,dofu)=cont;
        end;
    end;
end;
neq=cont;

% lectura de fuerzas en los nodos
fs=zeros(neqs,1);
fu=zeros(neq-neqs,1);
for nl=1:Nnl;
    fu(condu(loads(nl,1),1)-neqs)=loads(nl,2);
    fu(condu(loads(nl,1),2)-neqs)=loads(nl,3);
end;

% determinacion de grados de libertad de cada elemento
for nel=1:Ne;
    cont=0;
    for node=1:Nen;
        for dofs=1:(Ndof-2);
            cont=cont+1;
            ve(nel,cont)=conds(elemt(nel,node+3),dofs);
        end;
    end;
    for node=1:Nen;
        for dofu=1:(Ndof-3);
            cont=cont+1;
            ve(nel,cont)=condu(elemt(nel,node+3),dofu);
        end;
    end;
end;

% calculo de matriz B
B=zeros(3,6);
a1=coord(elemt(nel,5),2)*coord(elemt(nel,6),3)-coord(elemt(nel,6),2)*coord(elemt(nel,5),3);
a2=coord(elemt(nel,6),2)*coord(elemt(nel,4),3)-coord(elemt(nel,4),2)*coord(elemt(nel,6),3);
a3=coord(elemt(nel,4),2)*coord(elemt(nel,5),3)-coord(elemt(nel,5),2)*coord(elemt(nel,4),3);
a=(a1+a2+a3)/2;

```

```

B(1,1)=(coord(elemt(nel,5),3)-coord(elemt(nel,6),3))/(2*a);
B(1,3)=(coord(elemt(nel,6),3)-coord(elemt(nel,4),3))/(2*a);
B(1,5)=(coord(elemt(nel,4),3)-coord(elemt(nel,5),3))/(2*a);
B(2,2)=(coord(elemt(nel,6),2)-coord(elemt(nel,5),2))/(2*a);
B(2,4)=(coord(elemt(nel,4),2)-coord(elemt(nel,6),2))/(2*a);
B(2,6)=(coord(elemt(nel,5),2)-coord(elemt(nel,4),2))/(2*a);
B(3,1)=B(2,2);
B(3,2)=B(1,1);
B(3,3)=B(2,4);
B(3,4)=B(1,3);
B(3,5)=B(2,6);
B(3,6)=B(1,5);

% calculo de matriz CE
if Ta==1;
    d1=matprop(elemt(nel,2),2)/(1-(matprop(elemt(nel,2),3))^2);
    d2=matprop(elemt(nel,2),3);
    d3=(1-(matprop(elemt(nel,2),3)))*0.5;
elseif Ta==2;
    d1=matprop(elemt(nel,2),2)*(1-(matprop(elemt(nel,2),3)))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3))-
2*(matprop(elemt(nel,2),3))^2);
    d2=(matprop(elemt(nel,2),3))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3)));
    d3=0.5*(1-2*(matprop(elemt(nel,2),3)))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3)));
end
Ce=zeros(3);
Ce(1,1)=d1;
Ce(1,2)=d1*d2;
Ce(2,1)=Ce(1,2);
Ce(2,2)=Ce(1,1);
Ce(3,3)=d1*d3;
De=inv(Ce);

%calculo de matriz de rigidez
forma_B;
kaa=[-a*D/6 -a*D/12 -a*D/12;
    -a*D/12 -a*D/6 -a*D/12;
    -a*D/12 -a*D/12 -a*D/6];
kabt=[a*B/3; a*B/3; a*B/3];
kab=kabt';
kbb=zeros(6,6);
ke=[kaa kabt; kab kbb]*elemt(nel,3);

%Ensamble de la matriz de rigidez
for i2=1:15;
    if ve(nel,i2)~=0;
        for j2=1:15;
            if ve(nel,j2)~=0;
                kt(ve(nel,i2),ve(nel,j2))=kt(ve(nel,i2),ve(nel,j2))+ke(i2,j2);
            end;
        end;
    end;
end;

% calculo de matriz de coeficientes
kt=zeros(neq);

```



```

for nel=1:Nn;
    forma_Ce;
    D=De;
    kglobal;
end;
prescribed;
solver;

%Imposición de desplazamientos prescritos
ftot=[fs; fu];
for pv=1:Npv;
    for dof=1:Ndof;
        if displ(pv,dof+1)~=0;
            for k=1:neq;
                if dof+1 <= 4;
                    ftot(k,1)=ftot(k,1)-kt(k,conds(displ(pv,1),dof))*displ(pv,dof+1);
                    kt(k,conds(displ(pv,1),dof))=0;
                    kt(conds(displ(pv,1),dof),k)=0;
                    kt(conds(displ(pv,1),dof),conds(displ(pv,1),dof))=1;
                end;
                if dof+1 > 4 && dof+1 <= 6;
                    ftot(k,1)=ftot(k,1)-kt(k,condu(displ(pv,1),dof-3))*displ(pv,dof+1);
                    kt(k,condu(displ(pv,1),dof-3))=0;
                    kt(condu(displ(pv,1),dof-3),k)=0;
                    kt(condu(displ(pv,1),dof-3),condu(displ(pv,1),dof-3))=1;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;

%Solución de la matriz de coeficientes
[U,S,V]=svd(kt);
su=(V*pinv(S)*U')*ftot;
for pv=1:Npv;
    for j=1:5;
        if displ(pv,j+1)~=0;
            if j+1 <= 4;
                su(conds(displ(pv,1),j))=displ(pv,j+1);
            end;
            if j+1 > 4 & j+1 <= 6;
                su(condu(displ(pv,1),j-3))=displ(pv,j+1);
            end;
        end;
    end;
end;

postproceso

%Salida de resultados
st=zeros(Nn,3);
cont=0;
for i=1:Nn;
    for j=1:3;
        if conds(i,j)==0;

```

```

        st(i,j)=0;
    else;
        cont=cont+1;
        st(i,j)=su(cont);
    end;
end;
end;
ut=zeros(Nn,2);
for i=1:Nn;
    for j=1:2;
        if condu(i,j)==0;
            ut(i,j)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            ut(i,j)=su(cont);
        end;
    end;
end;
nodos=(1:Nn)';
sol=[nodos ut st];
plot;
save sol_malla03_viga_us.dat sol -ascii

```

Anexo D

Programa desplazamientos – Deformaciones - Esfuerzos

Programa principal

%Formulación desplazamiento-esfuerzo, u-s.

```

clc
clear all
close all

```

```

% Lectura de archivo de entrada
malla01_viga;

```

```

% PREPROCESO
preprocesor;

```

```

% PROCESO
procesor;

```

```

% POSTPROCESO
postprocesor;

```

```

%Lectura de las condiciones de frontera del archivo de entrada
conde=zeros(Nn,3);
for bc=1:Nbc;
    conde(cond(bc,1),1)=cond(bc,2);
    conde(cond(bc,1),2)=cond(bc,3);
    conde(cond(bc,1),3)=cond(bc,4);

```

```

end;
conds=zeros(Nn,3);
for bc=1:Nbc;
    conds(cond(bc,1),1)=cond(bc,5);
    conds(cond(bc,1),2)=cond(bc,6);
    conds(cond(bc,1),3)=cond(bc,7);
end;
condu=zeros(Nn,2);
for bc=1:Nbc;
    condu(cond(bc,1),1)=cond(bc,8);
    condu(cond(bc,1),2)=cond(bc,9);
end;

%Cálculo de los grados de libertad no restringidos
%Grados de libertad para deformaciones
cont=0;
for node=1:Nn;
    for dof=1:3;
        if conde(node,dof)==1;
            conde(node,dof)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            conde(node,dof)=cont;
        end;
    end;
end;
neqe=cont;
%Grados de libertad para esfuerzos
for node=1:Nn;
    for dof=1:3;
        if conds(node,dof)==1;
            conds(node,dof)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            conds(node,dof)=cont;
        end;
    end;
end;
neqs=cont;
%Grados de libertad para desplazamientos
for node=1:Nn;
    for dof=1:2;
        if condu(node,dof)==1;
            condu(node,dof)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            condu(node,dof)=cont;
        end;
    end;
end;
neq=cont;

%Cargas nodales
fe=zeros(neqe,1);
fs=zeros(neqs-neqe,1);
fu=zeros(neq-neqs,1);

```

```

for nl=1:Nnl;
    fu(condu(loads(nl,1),1)-neqs)=loads(nl,2);
    fu(condu(loads(nl,1),2)-neqs)=loads(nl,3);
end;

```

%Cálculo del vector de ensamble

```

ve=zeros(Ne,24);
for nel=1:Ne;
    j=0;
    for k=4:6;
        for l=1:3;
            j=j+1;
            ve(nel,j)=conde(elemt(nel,k),l);
        end;
    end;
    j1=9;
    for k1=4:6;
        for l1=1:3;
            j1=j1+1;
            ve(nel,j1)=conds(elemt(nel,k1),l1);
        end;
    end;
    j2=18;
    for k2=4:6;
        for l2=1:2;
            j2=j2+1;
            ve(nel,j2)=condu(elemt(nel,k2),l2);
        end;
    end;
end;

```

% calculo de la matriz B

```

B=zeros(3,6);
a1=coord(elemt(nel,5),2)*coord(elemt(nel,6),3)-coord(elemt(nel,6),2)*coord(elemt(nel,5),3);
a2=coord(elemt(nel,6),2)*coord(elemt(nel,4),3)-coord(elemt(nel,4),2)*coord(elemt(nel,6),3);
a3=coord(elemt(nel,4),2)*coord(elemt(nel,5),3)-coord(elemt(nel,5),2)*coord(elemt(nel,4),3);
a=(a1+a2+a3)/2;
B(1,1)=(coord(elemt(nel,5),3)-coord(elemt(nel,6),3))/(2*a);
B(1,3)=(coord(elemt(nel,6),3)-coord(elemt(nel,4),3))/(2*a);
B(1,5)=(coord(elemt(nel,4),3)-coord(elemt(nel,5),3))/(2*a);
B(2,2)=(coord(elemt(nel,6),2)-coord(elemt(nel,5),2))/(2*a);
B(2,4)=(coord(elemt(nel,4),2)-coord(elemt(nel,6),2))/(2*a);
B(2,6)=(coord(elemt(nel,5),2)-coord(elemt(nel,4),2))/(2*a);
B(3,1)=B(2,2);
B(3,2)=B(1,1);
B(3,3)=B(2,4);
B(3,4)=B(1,3);
B(3,5)=B(2,6);
B(3,6)=B(1,5);

```

% calculo de matriz CE

```

if Ta==1;
    d1=matprop(elemt(nel,2),2)/(1-(matprop(elemt(nel,2),3))^2);

```

```

d2=matprop(elemt(nel,2),3);
d3=(1-(matprop(elemt(nel,2),3)))*0.5;
elseif Ta==2;
d1=matprop(elemt(nel,2),2)*(1-(matprop(elemt(nel,2),3)))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3))-
2*(matprop(elemt(nel,2),3))^2);
d2=(matprop(elemt(nel,2),3))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3)));
d3=0.5*(1-2*(matprop(elemt(nel,2),3)))/(1-(matprop(elemt(nel,2),3)));
end
Ce=zeros(3);
Ce(1,1)=d1;
Ce(1,2)=d1*d2;
Ce(2,1)=Ce(1,2);
Ce(2,2)=Ce(1,1);
Ce(3,3)=d1*d3;

% calculo de matriz de rigidez
forma_B
I=eye(3);
kaa=[a*C/6 a*C/12 a*C/12;
a*C/12 a*C/6 a*C/12;
a*C/12 a*C/12 a*C/6;];
kab=[-a*I/6 -a*I/12 -a*I/12;
-a*I/12 -a*I/6 -a*I/12;
-a*I/12 -a*I/12 -a*I/6;];
kac=zeros(9,6);
kba=kab';
kbb=zeros(9);
kbc=[a*B/3; a*B/3; a*B/3];
kca=kac';
kcb=kbc';
kcc=zeros(6);
ke=[kaa kab kac; kba kbb kbc; kca kcb kcc]*elemt(nel,3);

%Ensamble de la matriz de rigidez
for i2=1:24;
if ve(nel,i2)~=0;
for i3=1:24;
if ve(nel,i3)~=0;
kt(ve(nel,i2),ve(nel,i3))=kt(ve(nel,i2),ve(nel,i3))+ke(i2,i3);
end;
end;
end;
end;

kt=zeros(neq);
for nel=1:Ne;
forma_Ce;
C=Ce;
kglobal;
end;
prescribed;
solver;
%Imposición de desplazamientos prescritos
ft=[fe; fs; fu];
for i=1:Npv;
for j=1:8;

```

```

if displ(i,j+1)~=0;
    for k=1:neq;
        if j+1 <= 4;
            ft(k,1)=ft(k,1)-kt(k,conde(displ(i,1),j))*displ(i,j+1);
            kt(k,conde(displ(i,1),j))=0;
            kt(conde(displ(i,1),j),k)=0;
            kt(conde(displ(i,1),j),conde(displ(i,1),j))=1;
        end;
        if j+1 > 4 & j+1 <= 7;
            ft(k,1)=ft(k,1)-kt(k,conds(displ(i,1),j-3))*displ(i,j+1);
            kt(k,conds(displ(i,1),j-3))=0;
            kt(conds(displ(i,1),j-3),k)=0;
            kt(conds(displ(i,1),j-3),conds(displ(i,1),j-3))=1;
        end;
        if j+1 > 7 & j+1 <= 9;
            ft(k,1)=ft(k,1)-kt(k,condu(displ(i,1),j-6))*displ(i,j+1);
            kt(k,condu(displ(i,1),j-6))=0;
            kt(condu(displ(i,1),j-6),k)=0;
            kt(condu(displ(i,1),j-6),condu(displ(i,1),j-6))=1;
        end;
    end;
end;
end;
end;
end;

```

%Solución de la matriz de coeficientes

```

[U,S,V]=svd(kt);
esu=(V*pinv(S)*U')*ft;
for i=1:Npv;
    for j=1:8;
        if displ(i,j+1)~=0;
            if j+1 <= 4;
                esu(conde(displ(i,1),j))=displ(i,j+1);
            end;
            if j+1 > 4 & j+1 <= 7;
                esu(conds(displ(i,1),j-3))=displ(i,j+1);
            end;
            if j+1 > 7 & j+1 <= 9;
                esu(condu(displ(i,1),j-6))=displ(i,j+1);
            end;
        end;
    end;
end;
end;

```

Postproceso

%Salida de resultados

```

et=zeros(Nn,3);
cont=0;
for i=1:Nn;
    for j=1:3;
        if conde(i,j)==0;
            et(i,j)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            et(i,j)=esu(cont);
        end;
    end;
end;

```

```

        end;
    end;
end;
st=zeros(Nn,3);
for i=1:Nn;
    for j=1:3;
        if conds(i,j)==0;
            st(i,j)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            st(i,j)=esu(cont);
        end;
    end;
end;
ut=zeros(Nn,2);
for i=1:Nn;
    for j=1:2;
        if condu(i,j)==0;
            ut(i,j)=0;
        else;
            cont=cont+1;
            ut(i,j)=esu(cont);
        end;
    end;
end;
nodos=(1:Nn)';
sol=[nodos ut et st];
plot;
save malla01_viga_use.dat sol -ascii

```